MÉTODO DE EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON
INTEGRACIÓN DE ROMBERG

El método de extrapolación de Richardson combina dos aproximaciones numéricas para obtener una tercera, más precisa. El algoritmo de integración más eficiente dentro de este método, es el método de Romberg, que se plantea a continuación.

El algoritmo consiste en varias etapas. En la primera, se calculan $n+1$ (para algún n) aproximaciones aplicando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo $[a,b]$ en $1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n$ intervalos. Si notamos $I_{i,1}$ a la aproximación con paso $h_i = 2^i$, entonces la siguiente, $I_{i+1,1}$, será con paso $h_{i+1} = h_i/2$. En la siguiente etapa, se combinan dos aproximaciones consecutivas del paso anterior de la siguiente manera: $I_{i,2} := \frac{4}{3}I_{i+1,1} - \frac{1}{3}I_{i,1}$. En el siguiente paso, la combinación es $I_{i,3} = \frac{16}{15}I_{i+1,2} - \frac{1}{15}I_{i,2}$, luego $I_{i,4} = \frac{64}{63}I_{i+1,3} - \frac{1}{63}I_{i,3}$, y así siguiendo hasta el último nivel, que se alcanza cuando sólo contamos con un par de aproximaciones en el paso anterior. Notar que en cada paso la combinación cambia, pero siempre es una combinación convexa (es decir, los coeficientes suman 1). Para $n = 3$, el esquema del método sería:

Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4:

Trapecios

$$
\begin{tikzcd}
h_0 = b-a \arrow[dr] & & & \\
& I_{1,2} = \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1} \arrow[dr] & & \\
h_1 = \frac{b-a}{2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_{1,3} = \frac{16}{15}I_{2,2} - \frac{1}{15}I_{1,2} \arrow[dr] & \\
& I_{2,2} = \frac{4}{3}I_{3,1} - \frac{1}{3}I_{2,1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_{1,4} = \frac{64}{63}I_{2,3} - \frac{1}{63}I_{1,3} \\
h_2 = \frac{b-a}{2^2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_{2,3} = \frac{16}{15}I_{3,2} - \frac{1}{15}I_{2,2} \arrow[ur] & \\
& I_{3,2} = \frac{4}{3}I_{4,1} - \frac{1}{3}I_{3,1} \arrow[ur] & & \\
h_3 = \frac{b-a}{2^3} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Así, en el caso en que $n = 4$ en 4 pasos se llega a la aproximación buscada, $I_{4,1}$.

El objetivo de los siguientes ejercicios es implementar el método de Romberg.

1. Escriba un archivo de función llamado `trapComp.m` que reciba como parámetros una función f, un intervalo $[a,b]$ y un número natural m y utilice la regla de trapecios compuesta para aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$.

2. El objetivo es aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ usando el método de Romberg del esquema (para $n = 4$). El script `Romberg.m` construirá un matriz I de 4×4, y devolverá como resultado el único elemento no nulo de la cuarta columna.

    a) Comenzar el script, construyendo la primera columna de la matriz I, usando `trapComp.m`.

    b) Para los siguientes pasos, necesitaremos armar las combinaciones de cada par de aproximaciones consecutivas del paso anterior, como muestra el esquema. Para eso, escribir un archivo de función llamado `combinacion.m` que reciba un vector columna v y devuelva otro de la misma longitud, que en sus coordenadas tenga las combinaciones $\alpha v_{i+1} - \beta v_i$ y un 0 en la última coordenada.

   c) Completar el archivo `Romberg.m`, construyendo las siguientes columnas de la matriz I, aplicando la función del ítem anterior.

3. Modificar el programa anterior, de tal manera que el programa se detenga si la diferencia entre dos aproximaciones consecutivas es menor que cierto valor de tolerancia elegido. Es decir, definir una variable `tol` y mientras se construye cada columna de I, comparar la diferencia entre dos aproximaciones $I_{i,j}$ y $I_{i+1,j}$.