Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2016

Práctica 4 - Series de Fourier - Separación de variables

1 Series de Fourier

1. Probar que si f es periódica de período l, entonces para $x \in \mathbb{R}$, vale $\int_0^l f(y)dy = \int_x^{x+l} f(y)dy$.

2. Probar que si f, g son periódicas de período l, entonces

$$(f * g)(x) = \int_0^l f(x-y)\, g(y)\, dy$$

también es periódica de período l.

3. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones de $(-\pi, \pi)$

   (a) $f(x) = sg(x)$.

   (b) $f(x) = x$.

   (c) $f(x) = \pi^2 - x^2$.

   (d) $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$.

   (e) $f(x) = \exp(\alpha e^{ix})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   Sug: Usar la serie de Taylor de e^z y la unicidad de la serie de Fourier.

4. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi) \\ -\pi - x & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

y hallar $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

5. Si $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ calcular la serie de Fourier de

   (a) $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

   (b) $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

   (c) $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

(d) $(\mu_n f)(x) = f(x) e^{inx}$.

6. Si $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, escribir la serie de Fourier en la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kx) + b_k sen(kx)).$$

7. Sea D_n el núcleo de Dirichlet definido por

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{sen(n+\frac{1}{2})x}{sen(\frac{x}{2})}$$

probar que

(a) $s_n f = D_n * f$

(b) $\|D_n\|_{L^1} = O(\log n)$.

8. Este ejercicio tiene por objetivo mostrar que existen funciones continuas cuyas series de Fourier no convergen puntualmente. Sea $C_{per}[-\pi,\pi]$ el espacio de funciones continuas de período 2π, se define e_n el funcional lineal dado por $e_n(f) = (s_n f)(0)$. Supongamos que para toda $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ $(s_n f)(0) \to f(0)$ cuando $n \to \infty$, valdría entonces

(a) El conjunto $\{e_n\}_{n\geq 1}$ está puntualmente acotado.

(b) El conjunto $\{e_n\}_{n\geq 1}$ está acotado (usar el teorema de Banach-Steinhauss).

(c) Existe $M > 0$ tal que para toda $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ y $n \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t)\, dt \leq M \|f\|_{L^\infty}.$$

(d) $\|D_n\|_{L^1} \leq M$.

9. Dada $\phi \in C^1[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(x)\, dx = 0, \qquad \int_0^1 \phi(x)\, sen(\pi x)\, dx = 0.$$

Probar que vale

$$\int_0^1 \phi^2(x)\, dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 (\phi'(x))^2\, dx,$$

determinar si vale la igualdad para alguna función ϕ.

2 Separación de variables

10. Resolver separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,a) \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in (0,\pi) \\ u(x,a) = 0 & \text{para } x \in (0,\pi) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & \text{para } y \in (0,a) \,. \end{cases}$$

11. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos ($c > 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,l) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = g(x) & x \in (0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

12. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, se busca $u = u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en } D \\ u(x,0) &= f_1(x) \\ u(1,y) &= f_2(y) \\ u(x,1) &= f_3(x) \\ u(0,y) &= f_4(y). \end{cases}$$

13. Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0 & (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in (0,+\infty) \,. \end{cases}$$

Sug: considerar $v(x,t) = u(x,t)\exp(ct)$.

14. En los ejercicios anteriores imponer condiciones suficientes para que las series obtenidas sean soluciones del problema considerado.

15. Para cada natural n, se define la función

$$f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} sen(nx) \,.$$

(a) Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1) \\ u_n(x,0) = f_n(x) & x \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) \\ u_n(0,y) = u_n(\pi,y) = 0 & y \in (0,1). \end{cases}$$

(b) Mostrar que f_n y todas sus derivadas convergen a 0 en $[0,\pi]$ cuando n tiende a $+\infty$, pero que para todo $y > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(.,y)\|_\infty = +\infty$$

(c) Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace de la forma $u = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)$ en el cilindro $\{(x,y,z) : x^2+y^2<1, |z|<1\}$.