Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2015

Ejercicios para entregar. Fecha de entrega: **25/11**

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω tal que para cada $K \subset\subset \Omega$ compacto, existe una constante M_K tal que

$$\int_K |u_n(x)|\, dx \leq M_K.$$

Probar que existe una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos a una función armónica en Ω.

2. Transforme la ecuación del modelo de Black-Scholes[1] en una ecuación del calor mediante un cambio de variables.

Para describir el precio $V(S,t)$ de un activo financiero en el tiempo utilizamos:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}V + rS\frac{\partial}{\partial S}V - rV = 0 & \text{con } S \in (0,\infty),\ t \in (0,T] \\ V(S,T) = f(S) & \text{con } S \in (0,\infty) \end{cases}$$

donde S representa el precio del bien subyacente, σ^2 la varianza y r la tasa de interés.

Sugerencias: Primero observar que la derivada segunda respecto de S está multiplicada por S^2 y la derivada primera, por S. Buscar funciones tales que

$$\begin{aligned} S &= g(x) \\ V(S,t) &= v(x,t) = v(g^{-1}(S),t) \\ \frac{\partial}{\partial S}V &= \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}v. \end{aligned}$$

Luego debemos obtener una igualdad de la pinta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v + C_1\frac{\partial}{\partial x}v + C_2 v + C_4\frac{\partial}{\partial t}v = 0$$

con constantes que no dependan de S (ni x) ni t. ¿Qué cambio de variable temporal hace $C_4 = -1$ como en la ecuación del calor?

Finalmente, para eliminar los términos $\frac{\partial}{\partial x}v$ y v sustituir

$$v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x,t)$$

con α y β elegidos apropiadamente.

[1] Se utiliza para describir el precio de un derivado financiero que es un activo que se encuentra *atado* al valor de un determiando bien que se denomina *subyacente*. Para más detalles ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Black%E2%80%93Scholes_model`.