

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2015

ADICIONALES DEL PRIMER PARCIAL

1. Sea la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (\mu + V(x))y = \lambda y,$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $V(x)$ es simétrica y exponencialmente decreciente cuando $|x| \rightarrow \infty$. Sean dos soluciones linealmente independientes y_1, y_2 tal que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{y_i}{e^{\sqrt{\mu+\lambda}x}} = 1$ para $i \in \{1, 2\}$.

Sea $x^* \in \mathbb{R}$ y $f(\lambda) := y_1(x^*)$, Probar que $Zeros(f) \subseteq \mathbb{R}$.

2. Sea la ecuación

$$-C_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C_2 x^2 \psi = \lambda \psi,$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, y llamemos $p := \frac{\partial}{\partial x}$.

- (a) Probar que el operador de Sturm-Liouville H se puede descomponer como $H = C_3(a_- a_+ - \frac{1}{2})$, con $(a_- a_+ - a_+ a_-)(f) = Id_f = f$, $\forall f \in L^2$ (Ayuda: $u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$).
- (b) Probar que si ψ es autofunción de H con autovalor λ , entonces $a_+ \psi$ es autofunción de H con autovalor $\lambda + C_3$ y $a_- \psi$ lo es con autovalor $\lambda - C_3$.
- (c) Reescribir la ecuación como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} C_3 = (V(x) - \lambda) \psi, \tag{1}$$

con $V(x) = C_2 x^2$.

- (d) En este caso, probar que para toda solución ψ de (1) tal que $\|\psi\|_{L^2} = 1$, entonces $\lambda \geq \min(V(x))$ y por ende existe ψ_0 tal que $a_- \psi_0 = 0$.
- (e) Hallar ψ_0 y calcular el resto de los ψ_n y λ_n por la relación anterior. (Estamos suponiendo, pero es válido, que $a_-(S_{(L^2)}) \subseteq S_{(L^2)}$).

3. Sea L el operador dado por

$$Lu = (x^2 - 3)u'' + 2xu' - 6u.$$

- (a) Acotar los autovalores $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ del problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

- (b) Probar que si la n -ésima autofunción es un polinomio de grado n , entonces $\lambda_n = N(N+1) - 6$ y $N \geq n+2$.
- (c) Mostrar que la igualdad $N = n+2$ vale si y sólo si $n = 0$, y deducir que L es un operador positivo.
4. Dado el funcional $\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$, supongamos que L depende de $\dot{x}$ en forma lineal:

$$L(t, x, \dot{x}) = M(t, x) + N(t, x)\dot{x}$$

- a. Deduzca la ecuación de Euler-Lagrange para este funcional. ¿Qué ocurre si $M(t, x)dt + N(t, x)dx$ es una diferencial exacta?
- b. Considerar el siguiente problema de extremos:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^1 (x^2 + t^2 \dot{x}) dt \\ x(0) = 1, \quad x(1) = a. \end{cases}$$

Determinar para qué valores de a se obtiene una trayectoria extremal.

5. (a) **Teorema de invariancia del Lagrangiano:** Sea $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ y $\psi = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ una solución de la ecuación de Euler-Lagrange para L . A su vez sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $J(F) \neq 0$. Con:

$$q(t) = F(\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t), t) \text{ ie: } F.Id_t(\bar{q}(t), t) = q$$

Entonces $\psi(\bar{q})$ también es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L .

- (b) Hallar la distancia más corta entre dos punto A y B en la superficie

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

6. Dado el problema

$$\begin{cases} -y\partial_x u + x\partial_y u = u \\ u|_{\{y=0\}} = x^2, \end{cases}$$

probar que si $x \neq 0$ existe una única solución de clase C^1 definida en un entorno de $(x, 0)$. ¿Qué ocurre para $x = 0$? (o bien: “Probar que no existe solución C^1 definida en un entorno de $(x, 0)$ ”)

7. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$, $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in C^2(\overline{\Omega})$.

a. Mostrar que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución del problema, entonces verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

b. Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única u solución débil de este problema, y

$$u \in H := \{u : u = v + g, \text{ con } v \in H_0^1(\Omega)\}$$

¿Qué ecuación verifica v ?

c. Verificar que si $u \in H$, y $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces es solución clásica.