Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2015
Clase Series de Fourier y separación de variables

1 Panorama

Sea $f \in V := L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$, como ya vimos en la práctica 2 el operador de S-L $L = -\partial_{xx}$ induce una base de autofunciones en V con el producto interno usual. Es más, como:

$$-\left(e^{inx}\right)'' = n^2 e^{inx}$$

tenemos que $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal de V. Por ende tenemos que $\mathcal{B} := \{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de V y podemos representar f como:

$$f =_{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e^{inx}\rangle e^{inx}$$

Ahora si vemos a V como $\mathbb{R}$ espacio vectorial, tenemos que $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}}\}$ es la misma base es $\mathbb{R}$. De allí llegamos a la representación usual de Fourier de:

$$f =_{L^2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$$

Como mostró Pau la clase pasada esta escritura esta bien definida por la desigualdad $\sum_n a_n^2 + b_n^2 \leq \|f\|_{L^2}$ y además las sumas parciales hasta $n = K$ convergen en L^2 a f. Esto nos dirige a la siguiente proposición:

Proposition 1.1 *Equivalencias del sistema $\mathcal{B}$:*
Sea $\mathcal{B} = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el sistema ortonormal inducido por el operador de Sturm-Louville L en un espacio de Hilbert H. Entonces son equivalentes:

- *El sistema $\mathcal{B}$ es completo (ie: $\forall f \in H\ \exists\ c_n \in \mathbb{K}\ /\ f = \sum_n c_n u_n$)*
- *El sistema $\mathcal{B}$ es cerrado (ie: $\langle f, u_n\rangle = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \rightarrow\ f = 0$)*
- *Si c_n son los coeficientes de Fourier de f, entonces $\sum_n c_n^2 = \|f\|_H$ (Igualdad de Parseval)*
- *$\langle f, g\rangle = \sum_n c_n d_n$ para $f = \sum c_n u_n$ y $g = \sum d_n u_n$, con $f, g \in H$*

Proof : Ejercicio ∎

Ya Pau les mencionó el Lema de Riemman-Lebesgue para $f \in L^2$ usando que son los coeficientes de una serie convergente, vale adherir que podemos probarlo para todo sistema ortonormal $\mathcal{B}$ de $L^2([a, b])$ y para toda $f \in L^1([a, b])$ usando la proposición anterior y la densidad de las funciones de L^2 en L^1 para espacios de medida finita.

Example :

Sea $f = x\chi_{[-\pi,0]}(x) - x\chi_{[0\pi]}(x)$, hallemos su serie de Fourier:

$$\text{Como } f \text{ es par tenemos que } b_n = 0$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} xdx - \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -xdx = \frac{-\pi}{2}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -x\cos nxdx = \frac{-2}{\pi x^2}\cos nx|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^2}\chi_{nimpar}$$
$$\text{Entonces } f = \frac{-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

2 Convergencia de Series de Fourier

Es importante notar que la igualdad de arriba es en sentido L^2, pero si f tiene mas regularidad, puede llegar a valor que valga para todo punto?

Remark Supongamos que f es derivable y que $\int_{-\pi}^{\pi} fdx = 0$, es fácil ver usando partes que los coeficientes de Fourier de f' cumplen:

$$\bar{a}_0 = 0$$
$$\bar{a}_n = nb_n$$
$$\bar{b}_n = na_n$$

Y por ende si además $f' \in L^2$ tenemos por Bessel que:

$$\sum_n |a_n| + |b_n| \leq \sum_n n|a_n|\frac{1}{n} + n|b_n|\frac{1}{n} \leq \sum_n n^2a_n^2 * \sum_n \frac{1}{n^2} + \sum_n n^2b_n^2 * \sum_n \frac{1}{n^2} \leq \sum_n \frac{1}{n^2} * \left(\sum_n n^2(a_n^2 + b_n^2)\right)$$
$$\implies \sum_n |a_n| + |b_n| \leq C\left\|f'\right\|_{L^2} < \infty$$

O sea que <u>si $f' \in L^2$</u> entonces los coeficientes de f son absolutamente convergentes!

Remark Recordemos que si $f \in AC[-\pi,\pi]$ entonces f es continua y por el teorema de diferenciación de Lebesgue $\exists f'$ y $f' = g$ con $g \ / \ f = a + \int g$

Theorem 2.1 *Sea $f \in AC([-\pi,\pi])$ tal que $f' \in L^2$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f.*

Proof Usar M-test de Weirstrass para ver que la serie de Fourier es uniformemente convergente usando la proposición anterior. Sale ∎

O sea que para ver la convergencia puntual, ya basta con que f cumpla las hipótesis anteriores. El teorema justo es:

Theorem 2.2 *Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$ tal que para $x \in (-\pi,\pi)$:*

$$\int_{-pi}^{\pi} |\frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau}|d\tau < \infty \text{ (Condición de Dini)}$$

Entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente en x.

Proof Cualquier libro de Series de Fourier

Para nosotros nos va a bastar los siguientes enunciados:

Remark
- Sea f derivable en $x \in (-\pi,\pi)$, entonces f cumple la condición de Dini
- Sea $f \in C_0^{\gamma}([-\pi,\pi])$, entonces f cumple la condición de Dini $\forall x \in [-\pi,\pi]$

3 Separación de variables

Hallemos una solución del problema

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 \; 0 < x < \pi \; t > 0$$
$$u(0,t) = 0 \; t > 0$$
$$u(\pi,t) = 0 \; t > 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

Propongamos una solución de la forma $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$, entonces $u_{xx} = \phi''\psi$ y $u_{tt} = \phi\psi''$ y por ende:

$$\phi''\psi - \frac{1}{c^2}\phi\psi'' = 0$$

Ahora si suponemos que $u \neq 0$ entonces:

$$\frac{\phi''}{\phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi''}{\psi}$$

Pero notemos que el LHS es una función de x, mientras que el RHS es una función de t y la igualdad es $\forall x, t$ entonces ambos son iguales a una constante λ. O sea:

$$\phi'' = \lambda\phi$$

$$\psi'' = c^2\lambda\psi$$

Ahora: $u(0,t) = 0 \implies \phi(0)\psi(t) = 0 \; \forall t \implies \phi(0) = 0$ Y además: $u(\pi,t) = 0 \implies \phi(\pi)\psi(t) = 0 \; \forall t \implies \phi(\pi) = 0$

- Resolvamos ϕ

  Remark Si $\lambda \geq 0$ entonces la única solución es $\phi = 0$ y por ende no nos sirven

  Proof Ejercicio

  Por la Observación suponemos $\lambda < 0$, entonces $\phi(x) = \alpha\cos\sqrt{-\lambda}x + \beta\sin\sqrt{-\lambda}x$ Como $0 = \phi(0) = \alpha$ y $0 = \phi(\pi) = \beta\sin\sqrt{-\lambda}\pi$ entonces o $\beta = 0$ y nos queda $\phi = 0$ o $\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi \; k \in \mathbb{N} \implies \lambda = -k^2 \; k \in \mathbb{N}$. Luego $\phi_k(x) = \sin kx \; \forall k \in \mathbb{N}$

  Remark Notemos que al tener condiciones de Dirichlet en la dirección x, obtuvimos los autovalores del sistema, esto es una técnica general.

- Resolvamos ψ

  Tenemos $\psi_k(t) = -c^2k^2\psi(t)$ y por ende $\psi_k(t) = \alpha_k\cos kct + \beta_k\sin kct$. Y como obtenemos α_k, β_k ?? Ahí usamos las condiciones iniciales!

- Obtenemos la solución u

  Sea $u_k(x,t) = \phi_k\psi_k = \sin kx\,(\alpha_k\cos kct + \beta_k\sin kct)$ estas son solución $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces a priori podemos proponer $u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k$ como solución, inspirándonos en que en cada dirección tenemos un problema de S-L y en dimensión finita si tenemos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V_1 y V_2 entonces $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ es base de $V_1 \times V_2$.

Como $f(x) = u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha_k \sin kx$ y esto nos dice, que si extendemos f de forma impar (cosa de que $a_k = 0$ y tenga sentido restringido a $[0,\pi]$), llamando a esa extensión $\tilde{f}(x)$ tenemos: $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt = \alpha_k c_k$

Ahora $g(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin kx \beta_k kc$ y por ende, de la misma manera, $\tilde{b}_k = \frac{2}{\pi}\int_0 \pi g(t)\sin ktdt = c_k\beta_k kc$

- Veamos si nuestra u es solución

  Recopilando, si llamamos $\tilde{f}(x) = f(x)\chi_{[0,\pi]} - f(-x)\chi_{[-\pi,0]}$ y $\tilde{g}(x) = g(x)\chi_{[0,\pi]} - g(-x)\chi_{[-\pi,0]}$ y llamamos $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ft()\sin ktdt$ y $\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} gt()\sin ktdt$ entonces tenemos:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k \sin kx \cos kct + \frac{\tilde{b}_k}{kc}\sin kx \sin kct\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

1. Veamos que u esta bien definida y que $u \in C([0,\pi]\times[0,\infty))$
   Sea $S_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N} u_k$ es claro que $S_N \in C([0,\pi]\times[0,\infty))$, entonces si notamos que: $|u_k| \leq |b_k| + \frac{1}{kc}|\tilde{b}_k| \leq |b_k| + \frac{1}{c}|\tilde{b}_k|$
   Luego si $f', g' \in L^2 \implies S_N \to u$ uniformemente por la proposición anterior, y entonces $u \in C([0,\pi]\times[0,\infty))$
2. Chequeemos las condiciones de borde
   - $u(0,t) = \sum_k 0 = 0$
   - $u(\pi,t) = \sum_k 0 = 0$
   - $u(x,0) = \sum_k b_k \sin kx = f(x)$ y es en todo punto pues si pido $f' \in L^2$ entonces cumple la condición de Holder y entonces cumple Dini
   - $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$??
     Notemos que :
     $$|\frac{\partial S_N}{\partial t}| \leq \sum_{k=0}^{N}\left(|\frac{\partial u_k}{\partial t}|\right) \leq \sum_{k=0}^{N} k|b_k| + |\tilde{b}_k|$$
     Luego si $f'' \in L^2$ y $g' \in L^2$ tenemos que:
     $$\sum_k k|b_k| \leq \sum_k k^2|b_k|\frac{1}{k} \leq \sum_k (k^2|b_k|)^2 * \sum_k \frac{1}{k} < \infty$$
     Entonces por la proposición inicial bajo las hipótesis estas $\dfrac{\partial S_N}{\partial t} \to \dfrac{\partial u}{\partial t}$ y sacamos dos cosas, una es que la derivada de u respecto a t es continua, y otra es que $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial t}$ y por ende $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ pues como el item anterior, g cumple Dini
3. Chequeemos que $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$
   Es fácil ver de la misma manera del item anterior, que si $f'', g' \in L^2$ y $f, f', g \in AC[0,\pi]$ entonces $u \in C^1([0,\pi]\times[0,\infty))$
   Veamos las derivadas segundas:
   $$|\frac{\partial^2 S_N}{\partial x^2}| \leq \sum_{k=0}^{N}\left(|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}|\right) \leq \sum_{k=0}^{N} k^2|b_k| + \frac{k}{c}|\tilde{b}_k|$$
   Luego queda claro, por simetría que queda algo similar en t y por ende si $f, f', f'', g, g' \in AC[0,\pi]$ y $f''', g'' \in L^2([0,\pi])$ entonces $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$. Este es un clásico ejemplo de ecuación no regularizante, al contrario de las próximas que vamos a ver en la materia.

4. Chequeemos que u cumple la ecuación y por ende es solución clásica
   Es claro que $(S_N)_{xx} - \frac{1}{c^2}(S_N)_{tt} = 0$, pero como $(S_N)_{xx} \to u_x x$ y $(S_N)_{tt} \to u_t t$ y las convergencias son uniformes entonces $u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$