1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO.DE LIBRETA:

Ecuaciones Diferenciales A y B

Segundo Parcial 30/11/15

1. Resolver por el método de separación de variables,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_x & = & 0 & & \text{en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) & = 0 & t\in(0,+\infty) \\ u(x,0) & = & f(x) & & x\in(0,\pi), \end{cases}$$

donde $f \in L^2(0,\pi)$.

a) Verificar que la función u hallada es, efectivamente, una solución de la ecuación y que $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para $t \in (0,+\infty)$.

b) Probar que $u \in C^\infty([0,\pi]\times[\delta,+\infty))$, para todo $\delta > 0$.

c) Probar que $\lim_{t\searrow 0} u(x,t) = f(x)$ en sentido L^2.

2. Probemos que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es un conjunto estrictamente contenido pero denso de $\mathcal{C}_0$, donde

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}$ es impar, entonces para $b > 0$ tenemos que

$$\left| \int_1^b \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \le A,$$

con $A > 0$ que no depende de b.

b) Hallar $g \in \mathcal{C}_0$ que no cumpla el ítem anterior y concluir que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}_0$.

c) Ver que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es denso en $\mathcal{C}_0$.

3. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ tal que $u_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u_n(x_0) \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que, para todo compacto $K \subset \Omega$ existen una subsucesión $\{u_{n_k}\}_k$ y una función u armónica en K tal que $u_{n_k} \rightrightarrows u$ en K.

4. Sea $T \in \mathbb{R}^+$ y notemos $U_T = (0,1)\times(0,T]$. Además sean $u \in C^{2,1}(U_T)\cap C^1(\overline{U_T})$ y $u_0 \in C^1([0,1])$ tales que

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u^2 & = & 0 & \text{en } U_T \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{en } [0,1] \\ u_x(0,t) & \ge & 0 & \text{en } [0,T] \\ u_x(1,t) & < & 0 & \text{en } [0,T]. \end{cases}$$

Probar que $u(x,t) \le \|u_0\|_\infty$ para todo $(x,t) \in U_T$.

Justifique todas sus respuestas.

Apéndice

Sean a, $b \in \mathbb{R}$ entonces las soluciones del sistema $x'' + ax' + bx = 0$ son:

1. $\{e^{\alpha_1 t} \cos(\alpha_2 t), e^{\alpha_1 t} \sin(\alpha_2 t)\}$, si $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ es una raíz compleja del polinomio $z^2 + az + b$.

2. $\{e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}\}$, si α_1, α_2 son raíces reales distintas del polinomio $z^2 + az + b$.

3. $\{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}\}$, si el polinomio $z^2 + az + b$ tiene a α como raíz doble.

Resolución

Ejercicio 1

Supongamos que $u(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$, con $\psi \neq 0$ y $\varphi \neq= 0$, entonces

$$\psi(x)\varphi'(t) - \psi''(x)\varphi(t) - \psi'(x)\varphi(t) = 0.$$

Luego

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\psi''(x) + \psi'(x)}{\psi(x)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

porque, por un lado, depende sólo de x y por el otro sólo de t, por lo tanto, tiene que ser constante. Además recordemos que suponemos que todos los denominadores son distintos de cero.

Por otro lado, $u(0,t) = \psi(0)\varphi(t) = 0$ para todo $t > 0$, entonces $\psi(0) = 0$ (pues $\varphi \equiv 0$ no nos sirve). Análogamente $\psi(1) = 0$.

Tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver, por un lado

$$\begin{cases} \psi''(x) + \psi'(x) - \lambda\psi(x) = 0 & x \in (0,1) \\ \psi(0) = \psi(1) = 0, \end{cases}$$

y por el otro

$$\varphi'(t) - \lambda\varphi(t) = 0.$$

Esta parte la hicieron bien todos, así que avancemos! Llegaron a que

$$\psi_k(x) = \alpha_k e^{-\frac{1}{2}x} \sin(kx), \quad \varphi(t) = \beta_k e^{-(k^2+\frac{1}{2})t} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Entonces proponemos

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-\frac{1}{2}x} \sin(kx) e^{-(k^2+\frac{1}{2})t} = e^{-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}t)} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

Nos falta deteminar γ_k para que se cumpla $u(x,0) = f(x)$, pero $u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(kx)$, esto sucede si

$$f(x)e^{\frac{1}{2}x} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(kx).$$

Para eso definimos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)e^{\frac{1}{2}x} & \text{si } x \in [0,\pi) \\ -f(-x)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \in (-\pi,0), \end{cases}$$

es decir, la extensión impar de $f(x)e^{\frac{1}{2}x}$ al $(-\pi,\pi)$. Observemos que $\tilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$ pues $f \in L^2(0,\pi)$, $e^{\frac{1}{2}x}$ es continua y $(-\pi,\pi)$ es de medida finita, por lo tanto

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx),$$

donde $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)e^{\frac{1}{2}x}\sin(kx)dx$ (los términos a_0 y b_k son cero porque $\tilde{f}$ es impar).

Entonces propongo $\gamma_k = a_k$. Además observemos que, por Hölder,

$$|a_k| \le \frac{2}{\pi}\|e^{\frac{1}{2}\cdot}\|_{L^2(0,\pi)}\|f\|_{L^2(0,\pi)} = C\|f\|_{L^2(0,\pi)}. \tag{1}$$

a) Veamos que la u propuesta cumple la ecuación y las dos primeras condiciones de borde:

Sea $t_0 > 0$ fijo, veamos que $u \in C([0,\pi] \times (t_0, +\infty)$. Llamemos $u_k(x,t) = a_k \sin(kx)e^{-k^2t}$, entonces, por (1)

$$\|u_k(x,t)\| = |a_k|\,.\,|\sin(kx)|\,e^{-k^2t} \le C(e^{-kt_0})^k,$$

pues si $t > t_0$, $e^{-k^2t} < e^{-k^2t_0}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} C(e^{-kt_0})^k$ converge pues, $\lim_k \sqrt[k]{(e^{-kt_0})^k} = \lim_k e^{-kt_0} = 0 < 1$, y aplicamos el criterio de Cauchy de convergencia de series. Como t_0 era arbitrario, por el M-test de Weierstrass, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ converge absoluta y uniformemente en $[0,\pi] \times (t_0, +\infty)$, como t_0 era arbitrario, converge uniformemente en $[0,\pi] \times (0, +\infty)$.

Con esto vimos que u está bien definida. Además, sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x,t)$, vimos que $S_n \rightrightarrows u$ en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$ y S_n es continua para cada n, entonces $u \in C([0,\pi] \times (0,+\infty))$.

Por otro lado, cada S_n verifica $(S_n)_t - (S_n)_{xx} - (S_n)_x = 0$ y $S_n(0,t) = S_n(\pi,t) = 0$ pues cada u_k lo verifica y las S_n son sumas finitas de u_k.

Entonces, para ver que u es solución, nos resta ver que $(S_n)_t$, $(S_n)_{xx}$ y $(S_n)_x$ convergen uniformemente.

$\frac{\partial S_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t)$, entonces $\frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t) = a_k(-k^2)\cos(kx)e^{-k^2t}$, por lo tanto, si fijamos $t_0 > 0$, por (1),

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_k(x,t)\right| = |a_k|\,k^2\,|\cos(kx)|\,e^{-k^2t} \le Ck^2(e^{-kt_0})^k.$$

Veamos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} Ck^2(e^{-kt_0})^k$ converge por el criterio de Cauchy ya que

$$\lim_k \sqrt[k]{k^2(e^{-kt_0})^k} = \lim_k \sqrt[k]{k^2}e^{-kt_0} = 1{,}0 < 1.$$

Como t_0 era arbitrario, por el M-test, $\frac{\partial S_n}{\partial t} \rightrightarrows v$, como $S_n \rightrightarrows u$, u resulta derivable respecto de t y $v = u_t$.

Las cuentas para $(S_n)_x$ y $(S_n)_{xx}$ son parecidas, tenemos que probar que series de la pinta $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)(e^{-kt_0})^k$ convergen, donde $t_0 > 0$ fijo y $p(k)$ es un polinomio en k aplicando el criterio de Cauchy de nuevo (observemos que $\sqrt[k]{p(k)} \to 1$ cuando $k \to \infty$).

Luego $u \in C^{2,1}((0,\pi) \times (0,+\infty))$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y $u_t - u_{xx} - u_x = 0$.

b) En este ítem sólo había que observar que las derivadas α-ésimas de u_k van a ser de la pinta $a_k p(k)\cos(kx)e^{-k^2t}$ o $a_k p(k)\,\mathrm{sen}\,(kx)e^{-k^2t}$ donde $p(k)$ es un polinomio, entonces, para $t_0 > 0$ fijo, por (1),

$$|D^\alpha u_k(x,t)| \le C\,|p(k)|\,(e^{-kt_0})^k$$

y la serie de la derecha converge por el criterio de Cauchy, luego por el M-test

$$D^\alpha S_n \rightrightarrows D^\alpha u,$$

y como $D^\alpha S_n$ es continua para todo α, $D^\alpha u$ también lo es.

c) Veamos que $\lim_{t\searrow 0} u(x,t)e^{\frac{1}{2}x} = f(x)e^{\frac{1}{2}x}$ en sentido L^2. Como $\sin(kx)$ pertenecen a una BON,

$$\|u(\cdot,t)e^{\frac{1}{2}\cdot} - f(\cdot)e^{\frac{1}{2}\cdot}\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \|u(\cdot,t)e^{\frac{1}{2}\cdot} - \tilde{f}(\cdot)\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (e^{-(k^2+\frac{1}{4})t} - 1)^2.$$

Notemos que $e^{-(k^2+\frac{1}{4})t} < 1$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, por Bessel, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, entonces existe $M > 0$ tal que $\sum_{k=M}^{\infty} a_k^2 \leq \varepsilon$. Entonces

$$\|u(\cdot,t)e^{\frac{1}{2}\cdot} - f(\cdot)e^{\frac{1}{2}\cdot}\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \sum_{k=1}^{M-1} a_k^2 (e^{-(k^2+\frac{1}{4})t} - 1)^2 + \sum_{k=M}^{\infty} a_k^2,$$

el primer término tiende a cero porque es una suma finita y puedo meter el límite adentro y el segundo término es menor que ε, luego

$$\|u(\cdot,t)e^{\frac{1}{2}\cdot} - f(\cdot)e^{\frac{1}{2}\cdot}\|_{L^2(0,\pi)} \to_{t\to 0} 0.$$

Por otro lado

$$\left|e^{\frac{1}{2}x}(u(x,t) - f(x))\right|^2 = e^x \left|u(x,t) - f(x)\right|^2 \geq \left|u(x,t) - f(x)\right|^2,$$

entonces

$$\|u(\cdot,t)e^{\frac{1}{2}\cdot} - f(\cdot)e^{\frac{1}{2}\cdot}\|_{L^2(0,\pi)} \geq \|u(\cdot,t) - f(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Por lo tanto $\|u(\cdot,t) - f(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \to_{t\to 0} 0$.

Ejercicio 2

1. Punto a

Primero como $f \in L^1$ sabemos que $\hat{f}$ esta bien definida, y estamos suponiendo que es impar. Notemos que esto implica que $0 = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(-\xi) = \text{ctes} \int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{(-i\xi x)} + e^{(ix\xi)})dx = \text{ctes} \int_{\mathbb{R}}(f(x)cos(\xi x)dx)$. Por ende $\hat{f} = iC\int_{\mathbb{R}} f(x)\operatorname{sen}(x\xi)dx$.

Ahora si nos daban $b > 0$ y nos pedían probar que $\left|\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi\right| \leq A$ con A que no dependa de b. Para eso debíamos escribir lo que ya sabemos!! Tenemos que $\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \int_1^b \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}dxd\xi$ y como $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\frac{\sin(x\xi)}{\xi} \in L^1([1,b])$ $\forall b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Pues por ejemplo esta acotada es continua y el soporte es de medida finita), esto dice que $f\frac{\sin(x\xi)}{\xi} \in L^1([1,b] \times \mathbb{R})$ CTP B entonces por Fubini tenemos que $\int_1^b \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}dxd\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_1^b \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi dx$. Este es un punto crucial, porque $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$!!

Reescribiendo tenemos que $\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi dx$.

Pasemos a acotar $\int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi$, para eso notemos que si $b \geq 1$ entonces $\int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi = \int_x^{xb} \frac{\sin(x)}{x}dx$:

- $b \leq 1$
  Entonces tenemos $\int_b^1 \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi$, donde $\frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}$ es continua en un compacto y esta acotada, por ende $\int_b^1 \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi \leq \|sinc(x)\|_{L^1([0,1])}$.
- $b \geq 1$
  Aca una forma era simplemente llamar $s_{2n} = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} gdx$ con $g = sinc(x)$, y llamar $s_{2n+1} = \int_{(2n+1)\pi}^{(2(n+1)\pi)} gdx$ entonces tenemos que $s_{2n} - s_{sn+1} \to 0$. Pero simplemente $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} sinc(x)dx = \sum_n (-1)^n s_n < \infty$ por el criterio de Liebniz.

  De yapa veamos como calcular $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} sinc(x)dx$!! donde $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

a) My personal favorite
Sean $I_1(t) = \int_t^\infty \frac{\sin(x-t)}{x} dx$ e $I_2(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$, entonces I_1 y I_2 son soluciones de $y'' + y = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Por ende $I_1 - I_2$ satisface $y'' + y = 0$, pero la solución de eso es $I(t) = A\sin(t+B)$! Ahora como (ej) I_1, $I_2 \to 0$ tenemos que $A = 0$ por lo que $I_1(t) = B = I_2(t)$, $t \geq 0$. O sea que $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathrm{sinc}(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_n(\arctan n - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$.

b) A trickyy
Del último ejercicio de la práctica de Fourier tenemos que $\mathcal{L}(1) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$ donde $\mathcal{L}$ es el operador transformada de Laplace. Entonces $\int_{\mathbb{R} \geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-xt} \sin(x) dt dx = \int_{\mathbb{R} \geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-xt} \sin(x) dx dt$ (Por Fubini) Y como $\mathcal{L}(\sin(x)) = \dfrac{1}{1+t^2}$ tenemos que $\int_{\mathbb{R} \geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R} \geq 0} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Por ende por h o por v tenemos que $\left| \int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \left| \int_1^b \frac{\sin(x\xi)}{\xi} d\xi \right| dx \leq C\|f\|_{L^1} := A$ y A no depende de b.

2. Punto b

Aquí simplemente era hallar una $g \in C_0$ impar tal que la cota anterior no ande, y era notar que una función que tienda a 0 muy lentamente va a funcionar pues esa integral va a diverger! Por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$ andaría, pero hay que definirla bien. Buen entonces hacemos $\tilde{f}(x) = \frac{1}{ln(x)} \chi_{\{x \geq 2\}} + \alpha \chi_{\{0 \leq x \leq 2\}}$ donde α es lineal entre $\frac{1}{ln(2)}$ y 0. Entonces sea g la extensión impar de $\tilde{f}$, es claro que $g \in \mathcal{C}_0$ y es impar. Además $\int_1^b \frac{g}{x} dx = A + \int_2^b \frac{1}{ln(x)x} dx = A + ln(ln(x))|_2^b \to \infty$ $(b \to \infty)$ y por ende no existe $f \in L^1$ tal que $\widehat{f} = g$.

3. Punto c

Tenemos que $C_c^\infty \subset S = \mathcal{F}(S) \subset \mathcal{F}(L^1) \subset \mathcal{C}_0$ por ende como $\overline{C_c^\infty} = \mathcal{C}_0$ entonces $\overline{\mathcal{F}(L^1)} = \mathcal{C}_0$.

Ejercicio 3

Para probar el resultado usaremos el teorema de Arzelá-Ascoli[1]. Empecemos demostrando que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones acotada para todo punto de Ω. Para esto definamos el conjunto

$$X = \{x \in \Omega \ / \ \exists\ C_x \in \mathbb{R}^+ \text{ y } u_n(x) \leq C_x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

y veamos que es todo el espacio Ω (que es conexo).

Primero probemos que es abierto. Consideremos $x \in X$. Existen C_x y $r > 0$ tal que $B(x, 2r) \subseteq \Omega$ por lo que $B = B(x,r) \subset\subset \Omega$. Dado que la familia de funciones es armónica no negativa, por la desigualdad de Harnack[2] existe una constante C que sólo depende de B (y no de las funciones) tal que

$$u_n(y) \leq \sup_B u_n \leq C \inf_B u_n \leq C u_n(x) \leq C C_x$$

para cualquier n e $y \in B$; con lo cual $B \subseteq X$. Para ver que es cerrado (relativo a Ω), consideremos $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_m \to x \in \Omega$. Como antes, tenemos $B = B(x,r) \subset\subset \Omega$ y existe $x_m \in B$; así

$$u_n(x) \leq \sup_B u_n \leq C \inf_B u_n \leq C u_n(x_m) \leq C C_{x_m}.$$

Además X es no vacío por hipótesis, por lo que resulta $X = \Omega$.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Arzel%C3%A0%E2%80%93Ascoli_theorem`
[2] Ver el libro de Evans en la página 32.

Para continuar, veamos que es una familia equicontinua. Sea $K \subseteq \Omega$ un compacto cualquiera y tomemos $\varepsilon > 0$, $x \in K$ y $r > 0$ tal que $B = B(x, r) \subseteq \Omega$. Por lo anterior resulta que

$$||u_n|_{\partial B}||_\infty \leq M$$

para un M suficientemente grande que depende sólo de la bola elegida pues podemos aplicar Harnack para $B(x, 2r) \subseteq \Omega$. Además por lo visto en la práctica[3] sabemos que

$$|\partial_i u_n(x)| \leq \frac{N}{r}||u_n|_{\partial B}||_\infty$$

y con todo esto más el teorema del valor medio obtenemos :

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq |\nabla u_n(\xi)||x - y| \leq \sqrt{N}\frac{N}{r}||u_n|_{\partial B}||_\infty|x - y| \leq \frac{N^{3/2}}{r}M|x - y|$$

entonces basta tomar $y \in B$ tal que $|x - y| < \varepsilon\frac{r}{N^{3/2}M}$ para verificar la continuidad independientemente del n elegido.

Ahora estamos en condiciones de probar el enunciado. Tenemos K como antes, sin pérdida de generalidad supongamos que tiene interior no vacío y que es conexo. Por lo hecho anteriormente podemos cubrir K con bolas donde la familia está equiacotada en toda la bola. Si nos quedamos con finitas tenemos una cota para todo el compacto que no depende de n. Dado que se cumplen las hipótesis de Arzelá-Ascoli, tenemos una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{n_j}$ que converge absolutamente a una u. Luego si tomamos el conjunto $\mathring{K}$ y usamos el primer ejercicio de la práctica ocho (pues esta subsucesiún convergen en cualquier compacto contenido en $\mathring{K}$) demostramos que u es armónica.

Finalmente, dado cualquier compacto K' podemos suponerlo conexo y tomar otro compacto K tal que $K' \subseteq K \subseteq \Omega$ y la distancia entre sus fronteras sea positiva.

Ejercicio 4

Supongamos que $u(x_0, t_0)$ es un m
aximo. Si $t_0 = 0$ ya tenemos el resultado. Supongamos que $t_0 > 0$ y que $x_0 \in \{0, 1\}$. Dado que $[0, T]$ es un compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $u_x(1, t) + \varepsilon < 0$.

Entonces definamos $v := u + \varepsilon x$, cumple que

$$\begin{aligned} v_x(0, t_0) &= u_x(0, t_0) + \varepsilon > 0 && (2) \\ v_x(1, t_0) &= u_x(1, t_0) + \varepsilon < 0. && (3) \end{aligned}$$

Luego si $x_0 = 0$ tenemos un absurdo pues hay un máximo y vale (2). Y por (3) tampoco podemos tener un máximo en $x_0 = 1$. Con lo cual debe ser que $t_0 = 0$ y así

$$\max_{U_T} u \leq \max_{U_T} v \leq \|v(\cdot, 0)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \varepsilon$$

y vale lo buscado pues ε puede ser tan pequeño como queramos.

[3]Ver el ejercicio seis de la práctica ocho.