

## PRÁCTICA 9

1. Usando el criterio de Cauchy o el de D'Alembert, estudiar la convergencia de las series cuyo término general es

a)  $a_n = \frac{3^n}{n2^n}$

b)  $a_n = \frac{5^n}{n!}$

c)  $a_n = \frac{3n-2}{4^n}$

d)  $a_n = e^{-n}$

e)  $a_n = \frac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n}$

f)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$

g)  $a_n = \frac{(3n^2+1)4^n}{n!}$

h)  $a_n = \frac{(5^n+n^2)n!}{2^n n^n}$

2. Calcular la suma de las siguientes series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 5 \frac{(-1)^n 3^{n-2}}{7^{8n+4}}$$

3. Usar el segundo criterio de comparación para analizar la convergencia de las series cuyo término general es

$$a_n = \frac{2n+4}{3n^2-1} \quad a_n = \frac{2n^2-\sqrt{n}}{3n^4+7} \quad a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

4. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , siendo

$$b_n = \frac{(-1)^n}{3n^2-1}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

## 5. Estudiar la convergencia de las series de término general

- a)  $\frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}$       b)  $\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$       c)  $\frac{2 + (-1)^n}{n^2}$       d)  $\frac{2^n}{n5^n}$
- e)  $\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$       f)  $\frac{n^3}{e^n}$       g)  $\frac{n!}{2^n + 1}$       h)  $\frac{2^n n!}{n^n}$
- i)  $\frac{e^n n!}{n^n}$       j)  $\frac{(-e)^n n!}{n^n}$       k)  $\frac{7^n}{(n+2)! + n!}$       l)  $(-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$

6. Hallar el radio  $R$  de convergencia de las siguientes series de potencias:

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
- e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1} x^n$
- f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 5^n}{7^n + 2} x^n$

En todos los casos estudiar la convergencia en  $x = R$  y en  $x = -R$

## 7. Hallar una representación en serie de potencias para las siguientes funciones y determinar el intervalo de convergencia:

- a)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$
- b)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- c)  $f(x) = \frac{5}{1-3x^3}$

## 8. Hallar las siguientes sumas

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$  si  $|x| < 1$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$  si  $|x| < 1$
- c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

## 9. Hallar la serie de Mac Laurin de:

- a)  $f(x) = \ln(1+x)$
- b)  $f(x) = x \cos x$

## APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

### Suma parcial

Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales. A partir de  $(a_n)$  construimos una nueva sucesión cuyo término general —que llamaremos *suma parcial*— está dado por

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

### Serie

Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales. Llamamos *serie* a la sucesión cuyo término general es la suma parcial de  $(a_n)$ ; es decir, con la notación de la definición anterior,  $(A_n)$  es la serie cuyo término general es  $a_n$ .

### Convergencia — Suma de la serie

Cuando la serie (es decir, la sucesión de sumas parciales) converge, se llama *suma de la serie* a su límite. En símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n$$

### Divergencia

Se dice que la serie de término general  $a_n$  *diverge* cuando no converge.

### Propiedades

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  son convergentes y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

### Proposición

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente, entonces  $a_n \rightarrow 0$ .

### Proposición (Serie armónica – Serie armónica generalizada)

Para cada  $p \in \mathbb{R}$ , se considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Esta serie

➤ converge si  $p > 1$

➤ diverge si  $p \leq 1$ .

### Criterios para series de términos positivos

#### PRIMER CRITERIO DE COMPARACIÓN

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge y  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo  $n \geq n_0$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

#### SEGUNDO CRITERIO DE COMPARACIÓN

Si  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son dos sucesiones de números reales tales que  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$  para todo  $n \geq n_0$  y  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell$ , entonces

□ si  $\ell > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

□ si  $\ell = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

□ si  $\ell = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

#### CRITERIO DE CAUCHY

Sea  $(a_n)$  una sucesión de número positivos tales que  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell$ . Entonces,

(i) si  $\ell < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge

(ii) si  $\ell > 1$  o  $\ell = +\infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge

#### CRITERIO DE D'ALEMBERT

Sea  $(a_n)$  una sucesión de número positivos tales que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell$ . Entonces,

(i) si  $\ell < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge

(ii) si  $\ell > 1$  o  $\ell = +\infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge

## Serie geométrica

Se denomina *serie geométrica* a aquella cuyo término general es  $a_n = r^n$ , para un cierto  $r \in \mathbb{R}$ .

### Proposición

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge si y sólo si  $|r| < 1$  y el valor de su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

## Convergencia absoluta

Se dice que una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es *absolutamente convergente* o bien que *converge absolutamente* si converge la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

### Proposición

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

## Serie alternada

Dada una sucesión  $(a_n)$ , se llama *serie alternada* a la que tiene por término general

$$(-1)^n a_n$$

## Criterio de Leibniz

Sea  $(a_n)$  una sucesión tal que

- $a_n \geq 0$
- $(a_n)$  es decreciente
- $a_n \rightarrow 0$

Entonces, la serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  converge.

## Serie de potencias

Se llama *serie de potencias centrada en a* a la que tiene por término general

$$a_n(x-a)^n$$

### Lema de Abel

Sea  $x_0$  un número real distinto de cero tal que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  es convergente. Entonces, cualquiera sea  $r$  tal que  $0 < r < |x_0|$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente en  $[-r, r]$

### Proposición

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie de potencias y sea  $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la serie converge en } [-r, r]\}$ , (eventualmente  $R$  puede ser  $+\infty$ ), entonces se verifica:

- la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente  $\forall x$  tal que  $|x| < R$
- la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  no converge para ningún  $x$  tal que  $|x| > R$

A dicho  $R$  se lo llama **radio de convergencia**

### Proposición

Sea  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie de potencias convergente  $R$  su radio de convergencia y  $x \in (-R, R)$ , entonces:

1. la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  converge en  $(-R, R)$
2.  $S(x)$  es derivable en  $(-R, R)$  y  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

### Proposición

Si  $f$  puede expresarse como  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$  para  $|x - a| < R$ , entonces:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta serie se llama **serie de Taylor de la función  $f$  centrada en  $a$** .