

PRÁCTICA 9

1. Usando el criterio de Cauchy o el de D'Alembert, estudiar la convergencia de las series cuyo término general es

a) $a_n = \frac{3^n}{n2^n}$

b) $a_n = \frac{5^n}{n!}$

c) $a_n = \frac{3n-2}{4^n}$

d) $a_n = e^{-n}$

e) $a_n = \frac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n}$

f) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

g) $a_n = \frac{(3n^2+1)4^n}{n!}$

h) $a_n = \frac{(5^n+n^2)n!}{2^n n^n}$

2. Calcular la suma de las siguientes series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 5 \frac{(-1)^n 3^{n-2}}{7^{8n+4}}$$

3. Usar el segundo criterio de comparación para analizar la convergencia de las series cuyo término general es

$$a_n = \frac{2n+4}{3n^2-1} \quad a_n = \frac{2n^2-\sqrt{n}}{3n^4+7} \quad a_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

4. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, siendo

$$b_n = \frac{(-1)^n}{3n^2-1}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

5. Estudiar la convergencia de las series de término general

- a) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}$ b) $\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ c) $\frac{2 + (-1)^n}{n^2}$ d) $\frac{2^n}{n5^n}$
- e) $\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ f) $\frac{n^3}{e^n}$ g) $\frac{n!}{2^n + 1}$ h) $\frac{2^n n!}{n^n}$
- i) $\frac{e^n n!}{n^n}$ j) $\frac{(-e)^n n!}{n^n}$ k) $\frac{7^n}{(n+2)! + n!}$ l) $(-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$

6. Hallar el radio R de convergencia de las siguientes series de potencias:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
- e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1} x^n$
- f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 5^n}{7^n + 2} x^n$

En todos los casos estudiar la convergencia en $x = R$ y en $x = -R$

7. Hallar una representación en serie de potencias para las siguientes funciones y determinar el intervalo de convergencia:

- a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
- b) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- c) $f(x) = \frac{5}{1-3x^3}$

8. Hallar las siguientes sumas

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$ si $|x| < 1$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ si $|x| < 1$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

9. Hallar la serie de Mac Laurin de:

- a) $f(x) = \ln(1+x)$
- b) $f(x) = x \cos x$

APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

Suma parcial

Sea (a_n) una sucesión de números reales. A partir de (a_n) construimos una nueva sucesión cuyo término general —que llamaremos *suma parcial*— está dado por

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Serie

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Llamamos *serie* a la sucesión cuyo término general es la suma parcial de (a_n) ; es decir, con la notación de la definición anterior, (A_n) es la serie cuyo término general es a_n .

Convergencia — Suma de la serie

Cuando la serie (es decir, la sucesión de sumas parciales) converge, se llama *suma de la serie* a su límite. En símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n$$

Divergencia

Se dice que la serie de término general a_n *diverge* cuando no converge.

Propiedades

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Proposición

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, entonces $a_n \rightarrow 0$.

Proposición (Serie armónica – Serie armónica generalizada)

Para cada $p \in \mathbb{R}$, se considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Esta serie

- converge si $p > 1$
- diverge si $p \leq 1$.

Criterios para series de términos positivos

PRIMER CRITERIO DE COMPARACIÓN

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

SEGUNDO CRITERIO DE COMPARACIÓN

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq n_0$ y $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell$, entonces

□ si $\ell > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

□ si $\ell = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

□ si $\ell = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

CRITERIO DE CAUCHY

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell$. Entonces,

- (i) si $\ell < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- (ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

CRITERIO DE D'ALEMBERT

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell$. Entonces,

- (i) si $\ell < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- (ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Serie geométrica

Se denomina *serie geométrica* a aquella cuyo término general es $a_n = r^n$, para un cierto $r \in \mathbb{R}$.

Proposición

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si y sólo si $|r| < 1$ y el valor de su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Convergencia absoluta

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* o bien que *converge absolutamente* si converge la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Proposición

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Serie alternada

Dada una sucesión (a_n) , se llama *serie alternada* a la que tiene por término general

$$(-1)^n a_n$$

Criterio de Leibniz

Sea (a_n) una sucesión tal que

- $a_n \geq 0$
- (a_n) es decreciente
- $a_n \rightarrow 0$

Entonces, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Serie de potencias

Se llama *serie de potencias centrada en a* a la que tiene por término general

$$a_n(x-a)^n$$

Lema de Abel

Sea x_0 un número real distinto de cero tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ es convergente. Entonces, cualquiera sea r tal que $0 < r < |x_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente en $[-r, r]$

Proposición

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y sea $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la serie converge en } [-r, r]\}$, (eventualmente R puede ser $+\infty$), entonces se verifica:

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente $\forall x$ tal que $|x| < R$
- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge para ningún x tal que $|x| > R$

A dicho R se lo llama **radio de convergencia**

Proposición

Sea $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias convergente R su radio de convergencia y $x \in (-R, R)$, entonces:

1. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge en $(-R, R)$
2. $S(x)$ es derivable en $(-R, R)$ y $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Proposición

Si f puede expresarse como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ para $|x - a| < R$, entonces:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta serie se llama **serie de Taylor de la función f centrada en a** .