PRÁCTICA 7

1. Verificar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ y que no existe $c \in (1,5)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Qué hipótesis del teorema de Rolle no se cumple?

2. Para la función $f(x) = 3x^2 - 5$, encontrar $c \in (-2,0)$ tal que $f(0) - f(-2) = 2f'(c)$.

3. Comprobar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene una única raíz real.

4. Probar las desigualdades siguientes:

   a) $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$
   b) $\log(x+1) < x$ para todo $x > 0$
   c) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$
   d) $\operatorname{arctg} x < x$ para todo $x \neq 0$

5. Sea f derivable en $[a, +\infty)$ tal que $f(a) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, +\infty)$.

   a) Mostrar que $|f(x)| < x - a$ para todo $x > a$.
   b) Deducir que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$.
   c) Concluir que $e^x > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hospital?
$$\lim_{x\to 1} \tfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \tfrac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \tfrac{6x}{2} = 3$$
   El límite es: -4.

7. Probar que $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = 0$ sin usar L'Hospital.
   ¿Qué sucede si se aplica L'Hospital? ¿Qué se deduce?

8. Calcular los límites siguientes:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$
   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

e) $\lim_{x\to 0} (x - \operatorname{sen} x)\ln x$

f) $\lim_{x\to 0^+} \ln x \ \ln(x+1)$

g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+e^x}{x^2+3x-1}$

h) $\lim_{x\to +\infty} x^3\, e^{-x^2}$

i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{\sqrt{x}}$

j) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

9. Hallar las fórmulas de Mac Laurin de las siguientes funciones indicando el término complementario:

a) $\frac{1}{x-1}$

b) e^x

c) $x\operatorname{sen}(x^3)$

d) $\ln(x+1)$

e) $(1+x)^n$

10. Desarrollar el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en potencias de $x - 2$.

11. a) Sea f una función $n+1$ veces derivable en $a = 0$ y sea P su n-ésimo polinomio de Taylor en $a = 0$. Probar que $xP(x)$ es el $(n+1)$-ésimo polinomio de Taylor de $g(x) = xf(x)$ en $a = 0$.

b) Encontrar el n-ésimo polinomio de Taylor de $\dfrac{x^2}{1+x}$ en $a = 0$. ¿Cuál es su resto?

12. a) Calcular ln(0.95) usando el polinomio de Mac Laurin de grado 3; estimar el error.

b) Calcular $e^{1.1}$ usando el polinomio de Mac Laurin de grado 4; estimar el error.

13. Si $P(x) = 2 + 3x - 4x^2$ es el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de f, hallar el polinomio de orden 2 de:

a) $g(x) = (e^x + x)f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$

14. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las siguientes funciones en el punto indicado. Escribir la expresión del resto.

    a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$
    b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$
    c) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$
    d) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$ en $(3, 4)$

15. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$\varphi(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

16. Hallar un polinomio $Q(x, y)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1 + x + y} - Q(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

17. Sea $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 tal que

$$g(t) = 2 - 2t + 4t^2 + R_2(t)$$

con $\lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$.
Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x, y) = g(2x + 3y)$ en $(0, 0)$.

Apéndice: Definiciones y Resultados

Extremos relativos

Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f ***tiene en*** x_0 ***un máximo relativo*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$.

Análogamente, se dice que f ***tiene en*** x_0 ***un mínimo relativo*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$.

Cuando $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$, decimos que f ***alcanza un valor máximo en*** x_0. Si en cambio se tiene que $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$, decimos que f ***alcanza un valor mínimo en*** x_0.

Teorema de Fermat

Si la función f, derivable en (a, b), alcanza un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto interior c, entonces $f'(c) = 0$.

Punto crítico

Sea f una función derivable en (a, b). Un punto $x_0 \in (a, b)$ se dice que es un ***punto crítico*** de f si $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en su interior, y verifica $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto intermedio c tal que $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$.

Teorema de Lagrange

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior. Entonces, existe un punto intermedio c tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \qquad (a < c < b)$$

Teorema de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en su interior. Supongamos además que la derivada g' no se anula en ningún punto del intervalo. Entonces existe un punto intermedio c tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

Regla de l'Hospital

Supongamos que f y g son derivables en un entorno reducido [1] de a y que ambas tienden a cero cuando la variable tiende hacia el punto a. Si existe el límite

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

NOTA: la regla de l'Hospital se mantiene válida en los casos en que f y g tienden hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ cuando la variable tiende hacia el punto a. La regla también es aplicable aun cuando $x \to \pm\infty$.

Observación

El hecho que no exita el límite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no implica que suceda lo mismo con $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Teorema *(Fórmula de Taylor para funciones de una variable real)*

Si se supone que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sus derivadas hasta el orden n: f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$ existen en un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ del punto a, la ***fórmula de Taylor*** para $|h| < \delta$ es la siguiente

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(h)$$

[1] si E es un entorno del punto a, al conjunto $E - \{a\}$ se lo llama ***entorno reducido de*** a

donde el ***término complementario***, ***resto*** o ***error*** $R_n(h)$ puede expresarse en la forma

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

para un c tal que $|c - a| < |h|$.

El polinomio

$$P_n(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se llama ***polinomio de Taylor de orden*** n ***de*** f ***en*** a.

Teorema 1 *(Fórmula de Taylor de Primer Orden)*

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{a} \in U$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + R_1(\mathbf{h}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + R_1(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

con

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0 \tag{1}$$

Notación

El polinomio

$$P(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$$

se llama ***polinomio de Taylor de orden*** 1 ***de*** f.

Lo que caracteriza a este polinomio es que es el único polinomio de orden 1 que satisface la condición (1), es decir, el único que cumple

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - P(\mathbf{a}+\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0$$

Teorema 2 *(Fórmula de Taylor de Segundo Orden)*

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y $\mathbf{a} \in U$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\, h_i h_j + R_2(\mathbf{h}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + Hf(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

con

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{R_2(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0 \tag{2}$$

Notación

El polinomio

$$P(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + Hf(\mathbf{a})(\mathbf{h})$$

se llama ***polinomio de Taylor de orden* 2 *de*** f.

Lo que caracteriza a este polinomio es que es el único polinomio de orden 2 que satisface la condición (2), es decir, el único que cumple

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - P(\mathbf{a}+\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||^2} = 0$$

Formas del resto de Taylor

(I) Si f es de clase C^2, el resto se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(\mathbf{c}) h_i h_j \\ &= Hf(\mathbf{c})(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{c}$ está sobre el segmento que une a $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}+\mathbf{h}$.

(II) Si f es de clase C^3, el resto se puede escribir en la forma

$$R_2(\mathbf{h}) = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c})\; h_i h_j h_k$$

donde $\mathbf{c}$ está sobre el segmento que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}+\mathbf{h}$.

Comentario

Llamando $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{h}$, los polinomios de Taylor de una función f que satisface las necesarias condiciones de diferenciabilidad –y las condiciones que verifican sus respectivos restos– se expresan en la forma

$$P_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \quad , \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_1(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - P_1(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||} = 0$$

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \quad , \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^2} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - P_2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||^2} = 0$$