PRÁCTICA 5

1. Usando sólo la definición de derivada, calcular:

   a) $f'(1)$ si $f(x) = 2x + 3$

   b) $f'(2)$ si $f(x) = 3x^2 - 1$

   b) $f'(1)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & , x > 1 \end{cases}$

   d) $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$. Probar que:

   a) f es derivable en $\mathbb{R}$.

   b) f' es continua en $\mathbb{R}$.

   c) f' no es derivable en $x = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln |x|$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y que $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$.

4. Mostrar que no existe la derivada de las funciones siguientes en los puntos que se indican

   a) $f(x) = |x|$ en $x = 0$

   b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

5. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde eso sea posible

   a) $f(x) = 2x^3 + 3x - 5$

   b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

   d) $f(x) = \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{xe^x}$

   e) $\dfrac{x^2 + 2x + 8}{x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 3}$

   f) $(\cos x + e^x)\sqrt{x + \sqrt{x}}$

g) $\cos((2x+1)^2)$

h) $x^{\operatorname{sen} x}$

i) $x^x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

6. Si $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$, hallar $F'(3)$.

7. Sea f una función derivable y tal que $f(0) = 0$. Si g es la función:

$$g(x) = 5x.f(x) + f(x^2)$$

Probar que: $g'(0) = 0$

8. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente:

a) es paralela a la recta $y = -2$

b) es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{x}{9}$

9. Analizar la existencia de $\lim_{t\to 0} \mathbf{f}(t)$, siendo

a) $\mathbf{f}(t) = (\frac{\operatorname{sen} t}{2t}, e^{2t}, \frac{t^2}{e^t})$

b) $\mathbf{f}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1-\cos t}{3t}\mathbf{j} + \frac{t}{t+1}\mathbf{k}$

10. Suponiendo que $\mathbf{g}$ es derivable, hallar las derivadas primera y segunda de

a) $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{g}(t^2)$

b) $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{g}(\sqrt{t})$

11. Hallar $f'(t)$

a) $\mathbf{f}(t) = (t^3 + t, t^2)$

b) $\mathbf{f}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 3t)$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Función derivable

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es ***derivable en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada*** de f en x_0 y se lo denota $f'(x_0)$.

Decimos que una función f es derivable en el intervalo (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos. A la función $f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ —que en cada punto x toma el valor $f'(x)$— se la llama ***función derivada*** de f.

Proposición

Toda función derivable es continua.

Propiedades

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en x_0, entonces

a) $f+g$ es derivable en x_0 y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) fg es derivable en x_0 y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

c) si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Regla de la Cadena

Sea f una función derivable en x_0 y g una función derivable en $f(x_0)$. Entonces, la función $g \circ f$ es derivable en x_0 y vale

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Derivadas laterales

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es ***derivable por la derecha en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada lateral por la derecha*** de f en x_0 y se lo denota $f'_+(x_0)$.

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es ***derivable por la izquierda en*** x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En caso de existir, ese límite se llama ***derivada lateral por la izquierda*** de f en x_0 y se lo denota $f'_-(x_0)$.

Recta tangente

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $x_0 \in (a,b)$. Se llama ***recta tangente al gráfico de f en x_0*** a la recta de ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Notación

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Las funciones $f_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman ***componentes*** de $\mathbf{f}$.

Límite

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que $\mathbf{f}(t)$ converge a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow |\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}| < \varepsilon$$

y lo escribimos: $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$.

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Entonces,

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{t \to t_0} f_i(t) = v_i \;\text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

Continuidad

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que $\mathbf{f}$ es ***continua en*** t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$. Y se dice ***continua en*** (a,b) si es continua en cada $t \in (a,b)$.

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\mathbf{f} \text{ es continua en } t_0 \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua en } t_0 \;\text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

Proposición

Sean $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, entonces las funciones

$$\begin{array}{rlrl} \mathbf{f}+\mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \mathbf{f}+\mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t) \\ \alpha.\mathbf{f} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \alpha.\mathbf{f}(t) & = \alpha(t).\mathbf{f}(t) = (\alpha(t)f_1(t),\dots,\alpha(t)f_n(t)) \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R} & \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{f}\times\mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \mathbf{f}\times\mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t) \qquad (n=3) \qquad\qquad \text{y} \\ ||\mathbf{f}|| & : I \longrightarrow \mathbb{R} & ||\mathbf{f}||(t) & = ||\mathbf{f}(t)|| \end{array}$$

también lo son.

Derivabilidad

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se dice que $\mathbf{f}$ es ***derivable en*** t_0 si existe un vector —denotado $\mathbf{f}'(t_0)$— tal que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0} = \mathbf{f}'(t_0)$$

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\mathbf{f} \text{ es derivable en } t_0 \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es derivable en } t_0 \text{ para todo } i = 1,\dots,n$$

En tal caso vale,

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0),\dots,f_n'(t_0))$$

Proposición

Toda función derivable es continua.

Proposición

Sean $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables, entonces las funciones

$$\mathbf{f}+\mathbf{g} \quad \alpha.\mathbf{f} \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{g} \quad \mathbf{f}\times\mathbf{g}\ (n=3) \quad ||\mathbf{f}||^2$$

también lo son y vale

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{f}+\mathbf{g})'(t) & = \mathbf{f}'(t)+\mathbf{g}'(t) \\ (\alpha.\mathbf{f})'(t) & = \alpha'(t).\mathbf{f}(t)+\alpha(t).\mathbf{f}'(t) \\ (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) & = \mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t) \\ (\mathbf{f}\times\mathbf{g})'(t) & = \mathbf{f}'(t)\times\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}'(t) \quad (n=3) \\ (||\mathbf{f}||^2)'(t) & = 2\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t) \end{array}$$

y —si $\mathbf{f}(t) \neq 0$— $||\mathbf{f}||$ también resulta derivable y vale $||\mathbf{f}||'(t) = \dfrac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{||\mathbf{f}(t)||}$.

Proposición

Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$ y $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha : J \longrightarrow I$ derivables. Entonces, $\mathbf{f} \circ \alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es derivable y vale

$$(\mathbf{f} \circ \alpha)'(t) = \alpha'(t)\, \mathbf{f}'(\alpha(t))$$

Clase C^k

Una función $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice ***de clase*** C^k si sus componentes son de clase C^k; es decir, si admiten derivadas continuas hasta el orden k.