PRÁCTICA 3

1. Dados los vectores $v = (1, 2)$ y $w = (3, -1)$ hallar gráfica y análiticamente los siguientes vectores:
$$v + w \qquad -3v \qquad 2(v - w) \qquad 3v + 2w$$

2. Calcular el perímetro del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (4. - 1)$

3. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:

   a) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| = 3\}$
   b) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| \leqslant 3\}$
   c) $\{v \in \mathbb{R}^2 : ||v|| \geqslant 5\}$
   d) $\{v \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant ||v|| \leqslant 3\}$

4. En cada uno de los siguientes casos hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición pedida:

   a) Si $v = (1, k, -1)$, que $\| v \| = 5$
   b) Que sean ortogonales los vectores $(1, 1)$ y $(-5, 2k)$

5. Hallar el ángulo que forman los vectores u y v en cada uno de los siguientes casos:

   a) $u = (-1, 0) \quad v = (-1, -1)$
   b) $u = (3, 1) \quad v = (-1, 3)$
   c) $u = (\sqrt{3}, 1) \quad v = (2\sqrt{3}, -2)$

6. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar gráficamente si son abiertos, cerrados, compactos.

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ | x | < 3 \ , \ | y | < 4\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y < 0\}$
   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y \leqslant 0\}$
   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 7\}$
   e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
   f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + y > 1\}$
   g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4 \geqslant 2x + y \geqslant 1\}$
   h) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0 \ , \ y \neq 0\}$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Operaciones con vectores

Suma Dados $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(w_1, \ldots, w_n)$ se define la suma como:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$$

La suma es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro ($\mathbf{0}$=(0,...,0)) y todo elemento tiene inverso (el inverso de $(v_1, \ldots, v_n)$ es $(-v_1, \ldots, -v_n)$).
Producto por un escalar Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define:

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$$

Propiedades

1. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$
2. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Norma de un vector

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$, llamamos ***norma de v*** al número

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Propiedades

1. $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leqslant ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$
2. $||a.\mathbf{u}|| = |a|\ ||\mathbf{u}|| \qquad (a \in \mathbb{R})$
3. $|u_i| \leqslant ||\mathbf{u}|| \leqslant |u_1| + \cdots + |u_n| \quad$ para todo $i = 1, \ldots, n$
4. $||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}|| \leqslant |\ ||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}||\ | \leqslant ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$

Producto escalar

Dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$, se define el ***producto escalar entre* u *y* v** como el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Propiedades

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos\alpha$ (α = ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$)
- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||$ *Desigualdad de Schwarz*
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2$

Proyección ortogonal

Sea $\mathbf{b}$ un vector no nulo. La ***proyección ortogonal del vector* a *sobre* b** es el vector

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2}\,\mathbf{b}$$

el número $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2}$ se llama ***componente de* a *en la dirección de* b**.

Conceptos topológicos

Bola abierta de centro a y radio $r>0$: $B(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;/\; ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < r\}$

Bola cerrada de centro a y radio $r>0$: $\bar{B}(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;/\; ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| \leqslant r\}$

Conjunto acotado: si está contenido en $B(\mathbf{0},r)$ para algún $r>0$

Entorno de $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$:   es un conjunto E que contiene una bola abierta centrada en $\mathbf{a}$

Conjunto abierto: es un conjunto que es entorno de cada uno de sus puntos. Es decir, un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ es ***abierto*** si para cada $\mathbf{a}\in A$ existe un $r>0$ tal que $B(\mathbf{a},r)\subset A$.

Punto interior: $\mathbf{a}\in A$ es un ***punto interior*** de A si existe un entorno de $\mathbf{a}$ contenido en A.

Interior de un conjunto: $\overset{\circ}{A} = \{\mathbf{a}\in A \;/\; \mathbf{a}$ es un punto interior de $A\}$

Conjunto cerrado: es un conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto. Es decir, un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ es ***cerrado*** si para cada $\mathbf{a}\notin A$ existe un $r>0$ tal que $B(\mathbf{a},r)\cap A = \varnothing$.

Frontera: $\partial A = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \;/\; B(\mathbf{x},r)\cap A \neq \varnothing$ y $B(\mathbf{x},r)\cap(\mathbb{R}^n - A)\neq\varnothing$ para todo $r>0\}$

Conjunto compacto: es un conjunto cerrado y acotado.