PRÁCTICA 2

1. Hallar los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término general es

   a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

   b) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{3n}$

   c) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

   d) $a_n = \cos(n\pi)$

2. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

   a) $\dfrac{n+2}{n^2-6}$

   b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   c) $\dfrac{n\cos n}{n^2+1}$

   d) $n\left[\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{2}{n^2-1}\right]$

   e) $\sqrt{n^2+n} - n$

   f) $\dfrac{2^n+3^n}{3^n+2} + \dfrac{2n}{n+3}$

3. Demostrar usando sólo la definición de límite que

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{2n^2-n} = \dfrac{3}{2}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n^3+3n-2)-3}{n} = 0$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1$

4. Para cada una de las sucesiones siguientes

$$a_n = (-1)^n \quad , \quad a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} \quad , \quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \quad ,$$

   a) probar que existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$b_n = a_{2n} \longrightarrow b \qquad \text{y} \qquad c_n = a_{2n+1} \longrightarrow c$$

   b) estudiar la convergencia de (a_n).

5. Comprobar que puede existir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $(a_n > 0)$ y no existir $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$

6. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

   a) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$
   b) $\dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$
   c) $\dfrac{n^4 - n + 2^n.n}{(n^3-1)2^n}$
   d) $\sqrt[n]{2n^2 - 1}$
   e) $\dfrac{8^n - 4^n}{3^n}$
   f) $\dfrac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$
   g) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}$
   h) $\dfrac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$
   i) $\dfrac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$
   j) $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$
   k) $\dfrac{a^n}{n^n}$

7. Mostrar —utilizando la definición— que las siguientes sucesiones son de Cauchy

   a) $\dfrac{1}{n}$
   b) $\dfrac{n}{n+1}$

8. Calcular los límites de las sucesiones siguientes

   a) $\dfrac{\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n}$
   b) $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$
   c) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
   d) $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$
   e) $\left(\dfrac{2n^2 + n - 1}{3n^2 - 6n + 1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}$

f) $\dfrac{\ln(e^n - 1)}{n}$

g) $n.\ln(1 - e^{-n})$

h) $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$

i) $\dfrac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2 + 1}$

j) $\dfrac{\operatorname{sen}(n! + 5n - 2) + \cos n}{\sqrt{n} + 5n - 4}$

k) $\left(\dfrac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n} - 5}\right)^{\operatorname{sen} n}$

9. Sean (a_{n_k}) , (a_{n_j}) y (a_{n_i}) tres subsucesiones de la sucesión (a_n). Si se sabe que las tres convergen al mismo límite ℓ, ¿se puede asegurar que $a_n \longrightarrow \ell$? ¿y a otro valor?

10. De la sucesión (a_n) se sabe que las subsucesiones

$$a_{3k} \longrightarrow \ell \quad , \quad a_{3k+1} \longrightarrow \ell \quad , \quad a_{3k+2} \longrightarrow \ell$$

Probar que $a_n \longrightarrow \ell$. Explicar por qué este resultado no se contrapone con las respuestas del ejercicio anterior.

11. Hallar el límite superior e inferior de

a) $1 , 3 , -1 , 1 , 3 , -1 , 1 , 3 , -1 , \ldots$

b) $(1 - \frac{1}{n}) \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$

c) $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$

d) $(-1)^n n$

e) $\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$

12. ¿Es cierto que

a) si $\limsup x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1,99$ para todo $n \geqslant n_0$?

b) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \geqslant n_0$?

c) si $\limsup x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b + \frac{1}{2}$ para todo $n \geqslant n_0$?

Enunciar y responder situaciones análogas para el límite inferior.

Apéndice: Definiciones y Resultados

Desigualdad de Bernoulli

Si $a > 1$, entonces

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario

Si $a > -1$, entonces

$$\sqrt[n]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Límite finito

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Sucesión acotada

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que es ***acotada*** si existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leqslant M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición

Toda sucesión convergente es acotada.

Proposición

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ sus respectivos límites. Entonces

(i) $a_n + b_n \longrightarrow a + b$

(ii) $a_n b_n \longrightarrow ab$

(iii) Si $b_n \neq 0$ para todo $n \geqslant n_0$, entonces $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{a}{b}$

Proposición

Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) tres sucesiones tales que

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \longrightarrow \ell$ y $c_n \longrightarrow \ell$, entonces $b_n \longrightarrow \ell$.

Límite infinito

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que $\quad a_n \longrightarrow +\infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n > M$$

Análogamente, decimos que $\quad a_n \longrightarrow -\infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n < -M$$

Finalmente, decimos que $\quad a_n \longrightarrow \infty \quad$ si para todo $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| > M$$

Algunos límites especiales

1. $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$
2. $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$
3. $r^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \end{cases}$

Criterio de D'Alembert

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(i) si $\ell < 1$, entonces $a_n \longrightarrow 0$

(ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $a_n \longrightarrow +\infty$

Criterio de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión de número positivos tales que $\quad \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$. Entonces,

(i) si $\ell < 1$, entonces $a_n \longrightarrow 0$

(ii) si $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, entonces $a_n \longrightarrow +\infty$

Subsucesión

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que (a_{n_k}) es una ***subsucesión*** de (a_n) si

$$n_k < n_{k+1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sucesión de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión. Decimos que (a_n) ***es de Cauchy*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Proposición

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Proposición

Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, es convergente.

Sucesiones monótonas

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se dice que

- (a_n) es ***creciente*** si
$$a_n \leqslant a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (a_n) es ***estrictamente creciente*** si
$$a_n < a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (a_n) es ***decreciente*** si
$$a_n \geqslant a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (a_n) es ***estrictamente decreciente*** si
$$a_n > a_{n+1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición

Toda sucesión monótona creciente (decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) tiene límite y su valor es el supremo (resp. ínfimo) de $\{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición *(Definición de e)*

La sucesión $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente. A su límite se lo denota

$$e = \text{lím } (1+\tfrac{1}{n})^n$$

Proposición

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Entonces, (a_n) es de Cauchy si y sólo si es convergente.

Punto límite

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que un número c es un ***punto límite*** de A si existe una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \longrightarrow c$.

Límite superior

Sea (a_n) una sucesión y $\mathcal{L} = \{\text{puntos límite de } (a_n)\}$.

➢ si $\mathcal{L}$ está acotado superiormente, se llama ***límite superior de*** (a_n) a

$$\limsup a_n = \sup \mathcal{L}$$

➢ si $\mathcal{L}$ no está acotado superiormente, se llama ***límite superior de*** (a_n) a

$$\limsup a_n = +\infty$$

Límite inferior

Sea (a_n) una sucesión y $\mathcal{L} = \{\text{puntos límite de } (a_n)\}$.

➢ si $\mathcal{L}$ está acotado inferiormente, se llama ***límite inferior de*** (a_n) a

$$\liminf a_n = \inf \mathcal{L}$$

➢ si $\mathcal{L}$ no está acotado inferiormente, se llama ***límite inferior de*** (a_n) a

$$\liminf a_n = -\infty$$