PRÁCTICA 1

1. Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que las satisfacen en la recta.

   a) $x - 10 > 2 - 2x$
   b) $2x + 1 > 10 - 6x$
   c) $7x - 2 \leqslant 2x + 1$
   d) $-5 < x - 4 < 2 - x$
   e) $\dfrac{5 + x}{5 - x} \leqslant 2$
   f) $\dfrac{3x - 5}{2x + 4} > 1$
   g) $0 < \dfrac{2x - 1}{x - 1} < 1$
   h) $x(x - 1) < 0$
   i) $2x^2 - 2 \geqslant x^2 - x$

2. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen cada una de las condiciones siguientes y representar dicho conjunto sobre la recta

   a) $|2 - x| < 2$
   b) $|2x - 1| \leqslant 2$
   c) $|4x - 12| > 4$
   d) $|x - 1| < |x + 3|$
   e) $\dfrac{|x - 1|}{x + 2} \geqslant 4$
   f) $\dfrac{|x - 1|}{-x} < 3$
   g) $|x + 1|^2 = |x + 1| + 2$
   h) $\dfrac{15 - 3x}{2 - |x + 3|} < 0$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant x^2\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$

4. Sea $a \geqslant 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a + b| = |a| + |b|$

   b) $|a - b| < |a| + |b|$

   c) $||a| - |b|| = |a - b|$

5. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cad una de las siguientes afirmaciones:

   a) $a < a^2$

   b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

   c) $a > 0 \Rightarrow ab \geqslant b$

   d) $a + b \geqslant \text{máx}\{a, b\}$

6. Sean $0 \leqslant x \leqslant y$. Probar que:$x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y$.

7. a) Mostrar que los siguientes conjuntos están acotados

$$\{n \in \mathbb{N} \ / \ 3 \leqslant n < 59\} \qquad , \qquad \left\{\frac{1}{x^2+1} \middle/ x \in \mathbb{R}\right\}$$

   b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente

$$\mathbb{R}_{>0} \qquad , \qquad \{m^2 \ / \ m \in \mathbb{N}\}$$

   c) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

$$\mathbb{Z} \qquad , \qquad \{x^{-1} \ / \ x < 0\} \qquad , \qquad \{-x^2 + 2x + 1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

8. Sean A , B subconjuntos no vacíos de números reales. Probar

   a) $A \subset B$ y B acotado superiormente $\implies$ $\sup A \leqslant \sup B$

   b) $A \subset B$ y B acotado inferiormente $\implies$ $\inf B \leqslant \inf A$

   c) $A \subset B$ y A no acotado $\implies$ B no acotado.

9. Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Comprobar que

   a) si $\alpha < \sup A$, entonces existe $a \in A$ tal que $\alpha < a$

   b) si $\beta > \inf A$, entonces existe $b \in A$ tal que $b < \beta$.

10. Calcular supremo e ínfimo —si existen— y probar que lo son, de los siguientes conjuntos

  a) $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 20 < n \leqslant 35\}$
  b) $(a, b]$
  c) $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$
  d) $\left\{ \dfrac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{N} \, , \ n \geqslant 30 \right\}$
  e) $\left\{ \dfrac{2n}{7n-3} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$
  f) $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ 2x^3 - 1 < 15\}$
  g) $\{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ / \ x^2 + x < 2\}$

11. Parte Entera

Dado $a \in \mathbb{R}$ se define

$$[a] = \max\{m \in \mathbb{Z} \ / \ m \leqslant a\}$$

Probar

  a) $[a] \leqslant a < [a] + 1$
  b) $[a] = a \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{Z}$
  c) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces
  $$m \leqslant a < m + 1 \quad \Longrightarrow \quad [a] = m$$
  d) Calcular: $[3, 9]$, $[20, 18742]$, $[0, 39]$, $[-1]$, $[-1, 3]$, $[-\pi]$

APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

Propiedades básicas de los números reales

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$
4. Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $a(bc) = (ab)c$
7. Existe $1 \in \mathbb{R}$ –$1 \neq 0$– tal que $a.1 = a$
8. Para cada $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = 1$
9. $a(b + c) = ab + ac$
10. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, vale una y sólo una de las siguientes afirmaciones

$$a = b \qquad , \qquad a < b \qquad , \qquad b < a$$

11. Si $a < b$ y $b < c$, $a < c$
12. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$
13. Si $a < b$ y $0 < c$, $ac < bc$

Módulo — Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del módulo

1. $|x| \geqslant 0$
2. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
3. $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
6. $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$
7. $|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geqslant a \\ -x + a & \text{si } x < a \end{cases}$

Distancia

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se llama distancia entre los números x e y al número

$$d(x, y) = |x - y|$$

Raíz $n-$ésima

⋆ Si n es par, la raíz $n-$ésima de un número *positivo* x es el ***único número positivo*** $\sqrt[n]{x}$ que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

⋆ Si n es impar, la ráiz $n-$ésima de un número $x \in \mathbb{R}$ es el único número que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

Cota superior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número α es una ***cota superior*** de A si

$$x \leqslant \alpha \qquad \text{para todo } x \in A$$

Cota inferior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número β es una ***cota inferior*** de A si

$$x \geqslant \beta \qquad \text{para todo } x \in A$$

Conjunto acotado

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que

- A está ***acotado superiormente*** si tiene una cota superior
- A está ***acotado inferiormente*** si tiene una cota inferior
- A está ***acotado*** si está acotado superior e inferiormente.

Supremo — Máximo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Un número α se llama ***supremo de*** A si

- α es cota superior de A
- si a es cota superior de A, entonces $a \geqslant \alpha$.

Se lo denota: $\sup A$. En caso que $\alpha \in A$, se lo llama ***máximo*** y se lo denota $\max A$.

Infimo — Mínimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Un número β se llama ***ínfimo de*** A si

- β es cota inferior de A
- si b es cota inferior de A, entonces $b \leqslant \beta$.

Se lo denota: $\inf A$. En caso que $\beta \in A$, se lo llama ***mínimo*** y se lo denota $\min A$.

Axioma de Completitud

Todo subconjunto de los números reales que sea no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Proposición

Sea A un conjunto acotado superiormente y no vacío. Un número real α es el supremo de A si y sólo si

- α es cota superior de A
- para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.

Proposición

Sea A un subconjunto de números reales acotado inferiormente, entonces existe $\inf A$.

Proposición *(Principio de Arquímedes)*

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant x$.

Corolario

Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Proposición *(Densidad de $\mathbb{Q}$)*

Dados dos números reales $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a < q < b$$

Proposición *(Densidad de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$)*

Dados dos números reales $a < b$, existe $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que

$$a < x < b$$

Proposición *(Parte Entera)*

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leqslant x < m + 1$$

Nota: este número m se llama ***parte entera de*** x y se lo denota $[x]$.