Ejercicio. Sean X, Y espacios meétricos, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de funciones continuas de X en Y y $f : X \to Y$ continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucecoón tal que $x_n \to x$ entonces $f_n(x_n) \to f(x)$.

ii) $f_n \rightrightarrows f$ sobre todo compacto de X.

Solución. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Para ver esta implicación probemos el contrarecíproco: supongamos que existe $K \subset X$ compacto tal que f_n no converja uniformemente a f sobre K y construyamos una suceción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente a x pero que $f_n(x_n) \nrightarrow f(x)$.

Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ con $d_{\infty,K}(f_m, f) \geq \varepsilon_0$ (esto es la definición de que no converja uniformemente sobre K). Esta última desigualdad puede escribirse como

$$\sup_{x\in K} d(f_m(x), f(x)) = \max_{x\in K} d(f_m(x), f(x)) = d(f_m(x_m), f(x_m)) \geq \varepsilon_0$$

(por la compacidad de K el supremo se alcanza y llamo x_m al lugar donde se alcanza).

Consideremos $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset K$. Como K es compacto, existe $x \in K$ y una subsucesión tales que $x_{m_k} \to x$. Esta subsucesión cumple que $f_m(x_{m_k})$ "está lejos" de $f(x_{m_k})$, pero queremos que eso se cumpla cuando tomo el mismo índice. Arreglemos eso.

Definos una nueva suceción $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$y_n = \begin{cases} x_{m_1}, & \text{si } 1 \leq k \leq m_1; \\ x_{m_k}, & \text{si } m_k \leq k \leq m_{k+1}. \end{cases}$$

No es difícil chequear que $y_n \to x$. Veamos que $f_n(y_n)) \nrightarrow f(x)$. Como f es continua, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(f(y_n), f(x)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Tomando $n \geq n_0$ resulta

$$\varepsilon_0 \leq d(f_n(y_n), f(y_n)) \leq d(f_n(y_n), f(x)) + d(f(x), f(y_n)) < d(f_n(y_n), f(x)) + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Despejando obtenemos que

$$\frac{\varepsilon_0}{2} < d(f_n(y_n), f(x)) \text{ si } n \geq n_0,$$

es particular, $f_n(y_n)$ no puede converger a $f(x)$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x, veamos que $f_n(x_n) \to f(x)$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el conjunto $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$, que resulta compacto. Como $f_n \rightrightarrows f$ sobre K, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup_{y\in K} d(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como f es continua, existe n_1 tal que si $n \geq n_1$ entonces $d(f(x_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ y $n \geq n_2$, luego

$$d(f_n(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$