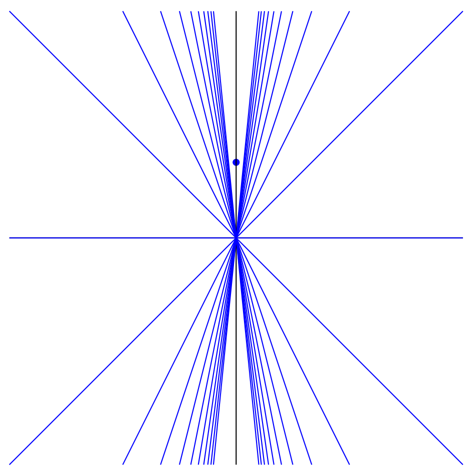
Resolución del Segundo Parcial

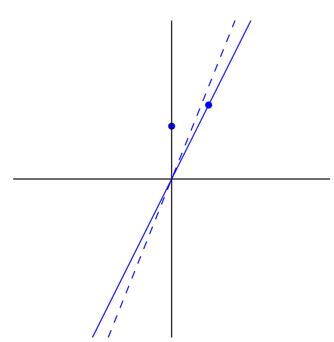
Ejercicio 1. Calcular las componentes conexas y arcoconexas de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,1)\}.$$

Solución. Comencemos haciendo un dibujo para m entre -10 y 10.



Definimos $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\}$, $A = \cup_{m\in\mathbb{Z}} A_m$ y $B = A \cup \{(0,1)\}$. Queremos estudiar las componentes conexas y arcoconexas de B. Los A_m son arcoconexos por ser rectas y A es arcoconexo pues es la unión de conjuntos arcoconexos que todos comparten un punto, el $(0,0)$.
El $(0,1)$ pertenece a la clausura de A pues los puntos $(\frac{1}{n},1)$ están en A y tienden a el $(0,1)$. Entonces como A es conexo y B satisface $A \subset B \subset \bar{A}$ concluimos que B es conexo. Es decir hay una única componente conexa.
Veamos que las componentes arcoconexas son dos: A y $\{(0,1)\}$. Para ver esto solo nos falta probar que no podemos conectar el $(0,1)$ con un punto de A por una curva continua.
Supongamos que tenemos $\gamma : [0,1] \to B$ tal que $\gamma(0) \in A$ y $\gamma(1) = (0,1)$. Tomemos $t_0 = \inf\{t \in [0,1] : \gamma(t) = (0,1)\} = \inf \gamma^{-1}((0,1))$. Como γ es continua $\gamma^{-1}((0,1))$ es cerrado y por lo tanto el ínfimo es mínimo, por lo que $\gamma(t_0) = (0,1)$. Como γ es continua en t_0 existe $\delta > 0$ tal que $\gamma([t_0-\delta, t_0+\delta]) \subset B_{1/2}((0,1))$. Tenemos que $\gamma(t_0) = (0,1)$, $\gamma(t_0-\delta) \in A$ (por la minimalidad de t_0) y $\gamma([t_0-\delta, t_0]) \subset B_{1/2}((0,1))$. Como $\gamma(t_0-\delta)$ está en A, es de la forma (x, mx) para algún $m \in \mathbb{Z}$, supongamos que este punto está en el primer cuadrante.



Consideramos $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > (m+\frac{1}{2})x\}$ y $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < (m+\frac{1}{2})x\}$, los abiertos separados por la línea punteada de la figura, estos desconectan $\gamma([t_0-\delta, t_0])$ pues $\gamma(t_0) \in U$, $\gamma(t_0-\delta) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $\gamma([t_0-\delta, t_0]) \subset U \cup V$ ya que $U \cup V$ cubre B salvo por el $(0,0)$ que no pertenece a $\gamma([t_0-\delta, t_0])$ pues $\gamma([t_0-\delta, t_0]) \subset B_{1/2}((0,1))$. Lo cual es un absurdo pues $\gamma([t_0-\delta, t_0])$ es conexo. Cuando $\gamma(t_0-\delta)$ está en el cuarto cuadrante los mismos U y V funcionan, cuando está en el segundo o tercero podemos hacer lo mismo tomando U y V separados por la recta $y = (m-\frac{1}{2})x$.
Con lo cual concluimos que no podemos conectar el $(0,1)$ con un punto de A por una curva continua como queriamos.

Ejercicio 2. Consideramos en $C[0,1]$ la norma 1, esto es

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(s)|\, ds.$$

Sea $T : (C[0,1], ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}$ el operador dado por

$$Tf = \int_0^1 (1-s)^2 f(s)\, ds$$

Calcular $||T||$.

Solución. Como $0 \leq (1-s)^2 \leq 1$ para $s \in [0,1]$, tenemos que

$$|Tf| = \left| \int_0^1 (1-s)^2 f(s)\, ds \right| \leq \int_0^1 |(1-s)^2||f(s)|\, ds \leq \int_0^1 |f(s)|\, ds = ||f||_1$$

por lo que $||T|| \leq 1$. Veamos que $||T|| = 1$, para esto querríamos una f tal que valga la igualdad en la cuenta de arriba, no existe tal f, sin embargo podemos construir funciones para las cuales las cuales nos acercamos a la igualdad. Necesitamos que la f este "concentrada" en el 0, donde $(1-s)$ es grande. Tomemos $f_n(x) = (1-x)^n$, tenemos

$$||T|| \geq \frac{|Tf_n|}{||f_n||_1} = \frac{\int_0^1 (1-s)^{n+2}\, ds}{\int_0^1 (1-s)^n\, ds} = \frac{\left.\frac{-(1-s)^{n+3}}{n+3}\right|_0^1}{\left.\frac{-(1-s)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1} = \frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+3}$$

Entonces como $\frac{n+1}{n+3} \to 1$ concluimos que $||T|| = 1$.
Observación: También podemos tomar

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2(1/n - x) & x \leq 1/n \\ 0 & x \geq 1/n \end{cases}$$

Ejercicio 3.

a) Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ en $[0,1]$.

b) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ converge uniformemente en $[a,\infty)$ para todo $a > 1$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1,\infty)$?

Solución. a) Comencemos viendo la convergencia puntual. Para $x = 1$, $f_n(1) = 1^n - 1^{2n} = 0$. Si $0 \leq x < 1$, $f_n(x) = x^n - x^{2n} \to 0$. Es decir f_n converge puntualmente a la función constantemente 0.

Estudiemos la convergencia uniforme, si convergen uniformemente debe ser a la función 0. $f_n(x) \geq 0$ pues $x^n \geq x^{2n}$ para $x \in [0,1]$. Queremos ver si las f_n se acercan a 0 uniformemente o no, para esto veamos cuanto vale su máximo. Si este se acerca a 0 concluiremos que la convergencia es uniforme y que no lo es en caso contrario. Tenemos que $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}$, veamos donde se anula la derivada (además de en 0 donde es claro que tenemos un mínimo)

$$\begin{aligned} nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} &= 0 \\ nx^{n-1} &= 2nx^{2n-1} \\ n &= 2nx^n \\ \frac{1}{2} &= x^n \\ \frac{1}{\sqrt[n]{2}} &= x \end{aligned}$$

Este valor pertenece al $[0,1]$, evaluemos f_n en este punto,

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto las f_n no convergen uniformemente.

b) Dado $a > 1$, tenemos

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{n+1}}{x^{2n}} = \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{a^{n-1}}$$

para $x \in [a, \infty)$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n-1}} < \infty$ por ser $a > 1$, por Weierstrass concluimos que la serie converge uniformemente.

Veamos que la convergencia no es uniforme en $(1, \infty)$. Si lo fuera, el termino general de la serie debería converger uniformemente a 0. Pero si evaluamos $\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ en $x = \sqrt[n+1]{2} > 1$ obtenemos

$$\frac{\sqrt[n+1]{2}^{n+1}}{1 + \sqrt[n+1]{2}^{2n}} = \frac{2}{1 + 2^{\frac{2n}{n+1}}} > \frac{2}{1+4}.$$

con lo cual tenemos una sucesión de puntos que muestran que el termino general esta uniformemente lejos del 0, la convergencia no es uniforme.

Ejercicio 4. Sea $K \in C([0,1] \times [0,1])$, definimos $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

Demostrar que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (C[0,1], ||\cdot||_\infty)$ es acotado, entonces $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Solución. Veamos que $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta uniformemente acotado y es equicontinuo. Sabemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, digamos que $||f_n||_\infty \leq M$. Y además como K es continua y está definida sobre un compacto está acotada y es uniformemente continua.
Veamos que $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta uniformemente acotado:

$$|Tf_n(x)| = \left|\int_0^1 K(x,y) f_n(y)\, dy\right| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f_n(y)|\, dy \leq \int_0^1 ||K||_\infty M\, dy \leq ||K||_\infty M$$

Y ahora que es equicontinuo, tomemos $\varepsilon > 0$,

$$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| = \left|\int_0^1 K(x,z) f_n(z) - K(y,z) f_n(z)\, dz\right| \leq$$

$$\int_0^1 |K(x,z) - K(y,z)||f_n(z)|\, dy \leq M \int_0^1 |K(x,z) - K(y,z)|\, dy$$

Si tomamos $\varepsilon' = \varepsilon/M$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|K(x,y) - K(z,w)| < \varepsilon'$ si $||(x,y)-(z,w)|| < \delta$. Entonces si $|x-y| < \delta$ tenemos que $|K(x,z) - K(y,z)| < \varepsilon/M$. Concluimos que

$$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| \leq M \int_0^1 |K(x,z) - K(y,z)|\, dy \leq \varepsilon$$

si $|x-y| < \delta$, como queríamos. Entonces por el teorema de Arzelá-Ascoli concluimos que $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es precompacto. Por lo que $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $\overline{\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, concluimos que tiene una subsucesión convergente con la norma infinito, es uniformemente convergente.

Ejercicio 5. Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con al menos un autovalor real simple. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ entonces tiene al menos un autovalor real.

Solución. Recordemos que λ es autovalor de A si es raíz de su polinomio característico, $P(x) = det(A - xId)$. Y que el autovalor sea simple quiere decir que es raiz simple del polinomio. Queremos ver que si modificamos un poco los coeficientes de A el polinomio característico de la matriz resultante sigue teniendo una raíz real. Vamos a hacer esto utilizado el teorema de la función implícita, vamos a ver que podemos encontrar un autovalor como función de los coeficientes.
Consideremos $f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(B, x) = det(B - xId)$$

Si λ es el autovalor simple de A, tenemos que $f(A, \lambda) = 0$. Y además que sea simple nos dice que $\frac{df}{dx}(A, \lambda) \neq 0$. Observemos que $f(B, x)$ es un polinomio en los coeficientes de la matriz B y la variable real x y por lo tanto es una función C^∞. Estamos en las hipótesis del teorema de la función implícita. Existe $W \subset \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}$ entorno de (A, λ), $V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ entorno de A y una función $x : V \to \mathbb{R}$ que satisface

$$W \cap \{(B, y) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} : f(B, y) = 0\} = graf(x)$$

Aquí $graf(x)$ es el gráfico de la función x, es decir $\{(B, x(B)) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} : B \in V\}$. Consideramos en $\mathbb{R}^{n\times n}$ la distancia infinito, sabemos que V es abierto con respecto esta. Podemos tomar $\delta > 0$ tal que $B_\delta(A) \subset V$. Tenemos que toda matriz $B \in B_\delta(A)$ va a tener un autovalor dado por $x(B)$. Hemos probado que toda matriz B cuyos coeficientes satisfacen que $|b_{ij} - a_{ij}| < \delta$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ tiene un autovalor real.