RESOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL

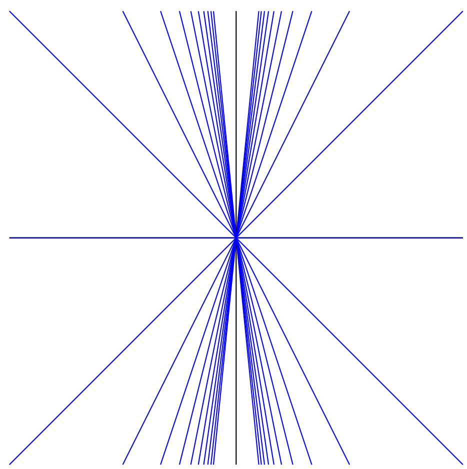
Ejercicio 1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx^2,\ \text{para algún } m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Si $E \subset A$ es no numerable, probar que E tiene algún punto de acumulación en A.

b) Determinar la clausura de A.

Solución. a) Supongamos que no, en particular E no tendría ningun punto de acumulación en E. Esto es, todos los puntos de E son aislados, obtenemos así un conjunto no numerable de puntos aislados lo cual es absurdo pues E es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es separable.

b) Comencemos haciendo un dibujo para m entre -10 y 10.



Para tener una idea de cuál es la clausura tomemos una sucesión $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ y veamos qué cosas podemos deducir sobre (x, y). Como antes, vale que $y_n = m_n x_n$ para todo n (el m_n depende de n) y que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$.

Separemos en casos según si x se anula o no.

Si $x \neq 0$ entonces $x_n \neq 0$ a partir de un momento (existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \neq 0$). A partir de ese momento, podemos escribir

$$\frac{y_n}{x_n} = m_n.$$

Tomando límite (ya sabemos que $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{y}{x}.$$

De acá deducimos que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Como $\mathbb{Z}$ es discreto tiene que converger a $m_0 \in \mathbb{Z}$, y luego deducimos que $\frac{y}{x} = m_0$. Esto nos dice que $(x, y) \in A$.

En caso de que $x = 0$, tenemos dos posibilidades, $y = 0$ o $y \neq 0$. Si $y = 0$, claramente el punto $(0, 0) \in A$. Miremos qué pasa cuando $y \neq 0$, "jugando" un poco y mirando el dibujo, imaginandonos el resto de las rectas que forman A, podemos intuir que los puntos de esta forma van a estar en la clausura.

Con las cuentas anteriores probamos que $\overline{A} \subseteq A \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ y ahora veremos que efectivamente vale la igualdad.

Sea $y \neq 0$. La idea es tomar una sucesión en A que tenga como segunda coordenada a y y como primera a algo tienda a 0. Consideremos

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{y}{n}, y\right)$$

Es claro que $(x_n, y_n) \longrightarrow (0, y)$ y además $y_n = nx_n$ por lo que $(x_n, y_n) \in A$. Lo que prueba que $\overline{A} = A \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

Ejercicio 2. Calcular

a) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ converge}\}$

b) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ diverge}\}$

Solución. En ambos items es claro que el cardinal es menor o igual a c pues son subconjuntos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0} = c$. Veamos que ambos son c, nos resta probar una desigualdad en cada caso, para esto vamos a construir funciones inyectivas desde conjuntos que sabemos que su cardinal es c. Hay muchas formas de hacer esto, los invitamos a jugar un poco y buscar otras funciones e ideas en general para el ejercicio.

a) Consideremos la sucesión $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$, en particular la suma de los inversos de la sucesión converge. Si le sumamos 1 a algunos terminos de la sucesión, la suma va a ser menor (por serlo cada termino) y por lo tanto convergente. Consideremos

$$\phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ converge}\right\}$$

dada por $\phi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n + 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta función está bien definida por lo que deciamos antes

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n + a_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$$

y claramente es inyectiva, lo que prueba que $c \leq \#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ converge}\}$.

b) Aquí es mas directo, consideremos

$$\phi : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ diverge}\right\}$$

la inclusión, esto es $\phi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta función está bien definida pues cada termino es mayor o igual a un medio y por lo tanto la serie diverge. Claramente es inyectiva, es una inclusión, lo que prueba que $c \leq \#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ diverge}\}$.

Por lo que el cardinal de ambos conjuntos es c.

Ejercicio 3. Consideremos el conjunto

$$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : a_n > a_{n+1}\}$$

en el espacio métrico (ℓ^∞, d_∞).

a) Determinar la clausura de A.

b) ¿$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in A^\circ$?

Solución. a) Consideremos $B = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : a_n \geq a_{n+1}\}$. Veamos que $\bar{A} = B$.

Veamos que $B \subset \bar{A}$. Sea $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, queremos ver que está en la clausura de A. Veamos que $B_\varepsilon(b) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Construyamos una sucesión explicitamente en la intersección, tenemos que tomar una sucesión cercana a b pero estrictamente decreciente. Tomemos $a_n = b_n + \frac{\varepsilon}{2n}$, es estrictamente decreciente

$$a_n = b_n + \frac{\varepsilon}{2n} \geq b_{n+1} + \frac{\varepsilon}{2n} > b_{n+1} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} = a_{n+1}$$

y se verifica que

$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

está en la intersección como queríamos.

Veamos que $\bar{A} \subset B$. Tomemos una sucesión en A convergente, veamos que el límite estará en B. Sea $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A y sea a tal que $a^k \longrightarrow a$. Como $|a_n^k - a_n| \leq d_\infty(a^k, a)$ tenemos que la sucesión converge coordenada a coordenada, esto es $a_n^k \longrightarrow a_n$. Como $a_n^k > a_{n+1}^k$ para todo n y k, tomando límite en k obtenemos $a_n \geq a_{n+1}$ como queríamos.

b) Veamos que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin A^\circ$. Queremos ver que $B_\varepsilon((\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}) \cap A^c \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Construyamos una sucesión allí. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < \varepsilon$ y consideremos

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < n_0 \\ 0 & \text{si } n \geq n_0. \end{cases}$$

Esta sucesión resulta estar en A^c pues $a_{n_0} = a_{n_0+1}$ y

$$d_\infty\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{n} - a_n\right| = \sup_{n\geq n_0} \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

como queríamos.

Ejercicio 4. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable. Consideramos en ℓ_∞ la métrica usual d_∞. Definimos la función $f : X \to \ell_\infty$ como

$$f(x) = (d(x, x_n) - d(x_n, x_1))_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) Probar que f está bien definida y es continua.

b) Probar que f es una isometría, es decir, que

$$d(x, y) = d_\infty(f(x), f(y))$$

para todos $x, y \in X$.

Solución. a) Para ver que f está bien definida debemos ver que $f(x) \in \ell_\infty$ para todo $x \in X$, es decir, que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(f(x))_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(x_n,x_1)| < \infty.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Como d es una distancia vale que

$$\begin{aligned} d(x_n,x_1) &\leq d(x_n,x) + d(x,x_1) \text{ y} \\ d(x,x_n) &\leq d(x,x_1) + d(x_1,x_n), \end{aligned}$$

de lo que se deduce que

$$\begin{aligned} d(x_n,x_1) - d(x_n,x) &\leq d(x,x_1) \text{ y} \\ d(x,x_n) - d(x_n,x_1) &\leq d(x_1,x) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|d(x,x_n) - d(x_n,x_1)| \leq d(x_1,x).$$

Como esto vale para n arbitrario, podemos concluir que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(x_n,x_1)| \leq d(x,x_1) < \infty$$

como queríamos.

Veamos ahora que es continua, más aún, que es Lipschitz con constante 1. Tomemos $x, y \in X$ y tratemos que acotar $d_\infty(f(x), f(y))$.

$$d_\infty(f(x),f(y)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(x_n,x_1) - d(y,x_n) + d(x_n,x_1)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(y,x_n)|.$$

Con una cuenta similar a la que hicimos recién se ve que $|d(x,x_n) - d(y,x_n)| \leq d(x,y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$d_\infty(f(x),f(y)) \leq d(x,y),$$

lo que prueba que f es continua y una de las desigualdades del ítem b).

b) Falta ver que $d_\infty(f(x),f(y)) \geq d(x,y)$ para todos $x, y \in X$. Observemos que en la parte a) no usamos que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, lo que nos da una idea de que deberíamos de tener que usarlo ahora. Daremos dos posibles formas de ver la desigualdad.

1. Supongamos que la desigualdad no es cierta, es decir, que existen $x, y \in X$ tales que $d_\infty(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Si esto vale, entonces existe $r > 0$ tal que

$$d_\infty(f(x),f(y)) + r = d(x,y)$$

(tomamos $r = d(x,y) - d_\infty(f(x),f(y))$). Reescribiendo esta igualdad obtenemos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(y,x_n)| = d(x,y) - r.$$

Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, existe x_{n_0} tal que $d(x_{n_0},y) < \frac{r}{2}$. Luego

$$d(x,y) - r = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(y,x_n)| \geq d(x,x_{n_0}) - d(y,x_{n_0}) > d(x,x_{n_0}) - \frac{r}{2}.$$

Por otro lado, $d(x,y) - r \leq d(x,x_{n_0}) + d(x_{n_0},y) - r < d(x,x_{n_0}) + \frac{r}{2} - r = d(x,x_{n_0}) - \frac{r}{2}$. Juntando las dos desigualdades resulta

$$d(x,x_{n_0}) - \frac{r}{2} > d(x,y) - r > d(x,x_{n_0}) - \frac{r}{2},$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto no puede ser que $d_\infty(f(x),f(y)) < d(x,y)$ y luego $d_\infty(f(x),f(y)) \geq d(x,y)$ como queríamos probar.

2. Sean $x, y \in X$. Veremos que $d(x,y)$ es el supremo del conjunto

$$A = \{|d(x,x_n) - d(y,x_n)| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Que es cota superior ya lo vimos en el ítem a), aquí veremos que existe una sucesión de elementos de A que converge a $d(x,y)$.
Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X existe una sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Luego, si tomamos la sucesión en A dada por $a_k = |d(x,x_{n_k}) - d(y,x_{n_k})|$, como las funciones distancia y módulo son continuas, resulta que $a_k \longrightarrow |d(x,x) - d(y,x)| = d(x,y)$. Esto concluye la demostración de que

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |d(x,x_n) - d(y,x_n)| = d_\infty(f(x), f(y)).$$

Ejercicio 5. Sean X e Y espacios métricos, $f : X \to Y$ continua y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tales que $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo n. Probar que $f(\cap_n A_n) = \cap_n f(A_n)$.

Solución. La inclusión hacia la derecha vale siempre. Si tomamos $x \in \cap_n A_n$, entonces $x \in A_n$ para todo n. Luego $f(x) \in f(A_n)$ para todo n, lo que equivale a decir que $f(x) \in \cap_n f(A_n)$.
Ahora tomemos $y \in \cap_n f(A_n)$ y veamos que existe $x \in \cap_n A_n$ tal que $f(x) = y$. Para cada n, existe $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) = y$. Observemos que como $A_{n+1} \subseteq A_n$, $A_n \subseteq A_1$ para todo n y en particular, $x_n \in A_1$ para todo n.
Como A_1 es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Llamemos x a su límite. Observemos que como f es continua $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$, y como $f(x_{n_k}) = y$ para todo k, por unicidad del límite, resulta $f(x) = y$.
Si vemos que $x \in \cap_n A_n$ terminamos. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión, existe k_0 tal que $n_{k_0} \geq n$. Como $A_{j+1} \subseteq A_j$ para todo j, resulta que $x_{n_k} \in A_n$ para todo $k \geq k_0$. Como A_n es compacto (en particular cerrado), el límite de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ debe pertener a A_n, es decir, $x \in A_n$.