

RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL 21/12/2015

Nombre y Apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	5	Calificación

Ejercicio 1. Calcular las componentes conexas y arcoconexas del siguiente subconjunto de \mathbb{R}^2 :

$$\left(\{0\} \times [-1, 1]\right) \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x > 0 \right\}.$$

Ejercicio 2. Consideramos en $C[0, 1]$ las siguientes normas:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)| ds \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} |f(s)|.$$

Sea $T : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ el operador dado por

$$T(f)(x) = \int_0^1 (x-s)^2 f(s) ds.$$

Calcular $\|T\|$.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Probar que E es de Banach si y solo si S es completo.

Ejercicio 4.

- Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$ en \mathbb{R} .
- Analizar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ en \mathbb{R} .

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Df(x)\| = k < 1$. Probar que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(x) - x$ es biyectiva.

Aclaración: aquí $\|A\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$.