SEGUNDO PARCIAL 3/12/2015

Nombre y Apellido: Número de libreta:

1	2	3	4	5	Calificación

Ejercicio 1. Calcular las componentes conexas y arcoconexas de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,1)\}.$$

Ejercicio 2. Consideramos en $C[0,1]$ la norma 1, esto es

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(s)|\, ds.$$

Sea $T : (C[0,1], ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}$ el operador dado por

$$Tf = \int_0^1 (1-s)^2 f(s)\, ds$$

Calcular $||T||$.

Ejercicio 3.

a) Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ en $[0,1]$.

b) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ converge uniformemente en $[a,\infty)$ para todo $a > 1$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1,\infty)$?

Ejercicio 4. Sea $K \in C([0,1]\times[0,1])$, definimos $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

Demostrar que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (C[0,1], ||\cdot||_\infty)$ es acotado, entonces $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Ejercicio 5. Sea $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con al menos un autovalor real simple. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ entonces tiene al menos un autovalor real.