Primer Parcial 7/10/2015

Nombre y Apellido: Número de libreta:

1	2	3	4	5	Calificación

Ejercicio 1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Si $E \subset A$ es no numerable, probar que E tiene algún punto de acumulación en A.

b) Determinar la clausura de A en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2. Calcular

a) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ converge}\}$

b) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ diverge}\}$

Ejercicio 3. Consideremos el conjunto

$$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : a_n > a_{n+1}\}$$

en el espacio métrico (ℓ^∞, d_∞).

a) Determinar la clausura de A.

b) ¿$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in A^o$?

Ejercicio 4. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable. Consideramos en ℓ_∞ la métrica usual d_∞. Definimos la función $f : X \to \ell_\infty$ como

$$f(x) = (d(x, x_n) - d(x_n, x_1))_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) Probar que f está bien definida y es continua.

b) Probar que f es una inmersión isométrica, es decir, que

$$d(x, y) = d_\infty(f(x), f(y))$$

para todos $x, y \in X$.

Ejercicio 5. Sean X e Y espacios métricos, $f : X \to Y$ continua y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tales que $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo n. Probar que $f(\cap_n A_n) = \cap_n f(A_n)$.