PRÁCTICA 9: TEOREMAS DE PUNTO FIJO

Ejercicio 1.

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.

iii) Mostrar que la función $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero que no tiene puntos fijos. Explicar por qué no contradice el teorema de punto fijo.

Ejercicio 2. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$. Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X, \qquad x \neq y,$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f, pero que sí lo es si X es compacto.

Ejercicio 3. Sean $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que K satisface la condición de Lipschitz en la tercer variable, es decir,

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Consideremos la siguiente ecuación integral no lineal en el espacio $C([a, b], \mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \varphi(x).$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}$$

y mostrar una sucesión que converja a la solución.

Ejercicio 4. Sea $f : [0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable.

i) Probar que $y \in C([0, T], \Omega)$ es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y(t))$ con la condición inicial $y(0) = y_0$ si y sólo si

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds \quad \forall t \in [0, T].$$

ii) Probar que si T es suficientemente pequeño, existe una única solución de este problema.

Ejercicio 5. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que T^n es una contracción. Probar que existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Ejercicio 6.

i) Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \phi(x),$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

Sugerencia: Considere primero el caso K uniformemente acotado. Luego resuelva el problema restringido a un intervalo $[a-b, a+b]$ y utilice la unicidad. Alternativamente se puede utilizar el ejercicio 5 en conjunto con una desigualdad del tipo

$$\|T^n f - T^n g\| \leq \frac{M^n l^n}{n!} \|f - g\|$$

ii) Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continua. Probar que las soluciones de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

están definidas para todo tiempo t.