

PRÁCTICA 7: ESPACIOS NORMADOS

Ejercicio 1. De los espacios métricos vistos hasta ahora, ¿cuáles son normados? ¿Y de Banach?

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre k ($k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Probar que se verifican:

- i) Las operaciones $+$: $E \times E \rightarrow E$ y \times : $k \times E \rightarrow E$ son continuas.
- ii) $\overline{B_r(x)} = \overline{B_r}(x)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- iii) $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

- i) Probar que $B_r(x)$ es convexo.
- ii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ lo es.
- iii) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
- iv) Probar que si C es convexo, entonces \overline{C} lo es.

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

- i) \overline{S} también es un subespacio.
- ii) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.
- iii) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

Ejercicio 5. Dado un k -espacio vectorial E , un subespacio (vectorial) $H \subset E$ se dice un *hiperplano* si existe $x \in E$, $x \neq 0$, tal que $H \oplus \langle x \rangle = E$.

- i) Probar que si H es un hiperplano, entonces para todo $y \in E \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = E$.
- ii) Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\phi : E \rightarrow k$ lineal, $\phi \neq 0$, tal que $H = \text{Nu}(\phi)$.
- iii) Probar que si E es un espacio normado y H es un hiperplano, entonces H es o bien cerrado o bien denso en E .

Ejercicio 6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre k ($k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) y sea $\phi : E \rightarrow k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si $\text{Nu}(\phi)$ es cerrado.

Ejercicio 7. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita. Definir una función lineal $\phi : E \rightarrow k$ que no sea continua. Deducir que todo espacio normado de dimensión infinita contiene un subespacio (vectorial) propio denso.

Ejercicio 8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperlanos.

i) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset \ell_\infty$.

ii) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$.

iii) $\{x \in \ell_1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell_1$.

Ejercicio 10. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- (1) T es continuo en 0;
- (2) $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0 ;
- (3) T es continuo;
- (4) T es uniformemente continuo;
- (5) $\exists M > 0 / \forall x \in E : \|Tx\| \leq M\|x\|$ (T es acotada);
- (6) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 11. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos $L(E, F) = \{T : E \rightarrow F / T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(E, F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

- i) $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
- ii) Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 12. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

Ejercicio 13. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 14. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n,$$

es lineal pero no continua.

Ejercicio 15. Sean $S, T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$, definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que $S, T \in L(\ell_1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 16. Sea $T : c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$. (Recordar: c es el conjunto de las sucesiones en \mathbb{R} convergentes).

Ejercicio 17. Sea $\phi \in C[0, 1]$ y sea $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

Ejercicio 18. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ un isomorfismo algebraico (es decir, una transformación lineal biyectiva). Consideramos en \mathbb{R}^n la norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

- i) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en \mathbb{R}^n .
- ii) Probar que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n : c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$.
- iii) Deducir que si N_1, N_2 son dos normas en \mathbb{R}^n , entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n : aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ (esto es: son equivalentes).

Ejercicio 19. Sean E un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 20. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$.

Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \forall s \in S$.

Sugerencia: considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 21. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.

Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Ejercicio 22. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.

Sugerencia: si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.