PRÁCTICA 5: COMPLETITUD, CONTINUIDAD UNIFORME, BAIRE Y COMPACIDAD

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
HEGEL.

Completitud

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 4. (Teorema de Cantor) Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de X, no vacíos, tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$, tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva.

i) Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

ii) ¿Es cierto que si X es completo entonces Y es completo?

Ejercicio 7.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a,b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde d_∞ es la métrica definida en el ítem anterior.

iii) Probar que $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 8. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad de que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

Continuidad Uniforme

Ejercicio 9. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \ d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in X$ y algún $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 10.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$ y

b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 11.

i) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

ii) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 12.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 13. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 14. Sean X e Y espacios métricos, con Y completo. Sea $D \subset X$ un denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Conjuntos Perfectos

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor.

i) Probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (y por lo tanto compacto).

ii) Probar que $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$).

iii) Probar que $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.

iv) Probar que $x \in \mathcal{C}$ si y solo si su desarrollo en base 3 tiene, admitiendo colas de $2'$s, sólo las cifras 0 y 2.

v) Probar que $\mathcal{C}$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 17.

i) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S (que por el ejercicio 6 de la práctica 3 es no vacío). Probar que:

   (a) $S - T$ es numerable.
   (b) $S \cap T$ es no numerable.
   (c) T es un conjunto cerrado.
   (d) T no posee puntos aislados.

ii) (Teorema de Cantor-Bendixon) Probar que cualquier conjunto cerrado F no numerable de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse de la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable.

Baire

Ejercicio 18. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 19. Sean (X,d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 20. Demostrar que no existe ninguna función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n\in\mathbb{N}$ considerar el conjunto

$$U_n=\Big\{x\in\mathbb{R}\ /\ \exists\, U\subseteq\mathbb{R} \text{ abierto con } x\in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U))<\frac{1}{n}\Big\}.$$

Ejercicio 21. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A\subset X$ es *nunca denso* si $(\overline{A})^\circ=\emptyset$.
Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$E_n=\{f\in C[0,1]\ /\ f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n\in\mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0,1],d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

iii) Probar que el conjunto formado por las funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $C[a,b]$.

Ejercicio 22. Sean (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$.

i) Probar que si A es nunca denso, entonces $X-A$ es denso. ¿Vale la recíproca?

ii) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X-A$ es nunca denso.

Ejercicio 23. Sean (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$. Probar que son equivalentes:

(1) A es nunca denso;

(2) toda bola abierta B contiene otra bola abierta $B_1\subset B$ tal que $B_1\cap A=\emptyset$;

(3) A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 24. Sea $\operatorname{Lip}[a,b]=\{f\in C[a,b]:\exists k>0,\ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|\}$. Probar que $(\operatorname{Lip}[a,b])^\circ=\emptyset$ en $C[a,b]$.

Compacidad

Ejercicio 25.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \;/\; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 26. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 27. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell_\infty \;/\; n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 28. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 29. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

i) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

ii) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 30. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in c_0 \;/\; d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 31. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera el espacio $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 32. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K *se realiza.*

ii) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva. ¿Se realiza esta distancia? ¿Y si $X = \mathbb{R}^n$?

iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 *se realiza.*

Ejercicio 33. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \ / \ \mathcal{K} \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Dados dos subconjuntos $A, B \subset X$, sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a \in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon),$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 34. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 35. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 36. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 37.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\text{lím}_{x \to -\infty} f(x) = \text{lím}_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 38. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $K \subset X$ compacto. Probar que si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$.

Ejercicio 39. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.