EJERCICIOS PARA ENTREGAR

Ejercicio 1.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:

  (a) Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞?

  (b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

iii) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.

iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.
Una partición de $\mathbb{N}$ es una familia de subconjuntos $F = \{P_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, no vacíos tales que $\cup_{i\in I} P_i = \mathbb{N}$ y $P_i \cap P_j = \emptyset$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

i) Probar que si $F = \{P_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una partición, entonces I es contable, es decir, a lo sumo numerable.

ii) Calcular $\#\{F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : F \text{ es una partición de } \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 3.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, que ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que $0 \leq d_n(x_n, y_n) \leq 1$ para todo par de elementos $x_n, y_n \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$
Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea $(\mathbb{R}, d)$ el conjunto de los números reales con la métrica usual. Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

iv) Sea $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n > x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular $\bar{A}$.

Ejercicio 4.

i) Consideremos el espacio métrico (X, d) donde $X = \{f : \mathbb{R} \to [0,1] : f \text{ es continua}\}$ y d esta dada por
$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$
Sea $E = \{f \in X : f(0) \in \mathbb{Q}\}$. Probar que E es denso en X. ¿Es X separable?

ii) Consideremos $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y en este espacio las distancias d_1 y d_∞ dadas por
$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$
Sea $id : (C[0,1], d_1) \to (C[0,1], d_\infty)$, ¿es continua? ¿y su inversa?

Ejercicio 5. Probar que el conjunto formado por las funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $(C[a,b], d_\infty)$.

Ejercicio 6. Calcular las componentes conexas y arcoconexas del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$
$$\{0 \times [-1,1]\} \cup \left\{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) : x \neq 0\right\}.$$
¿Es localmente conexo?

Ejercicio 7. Consideramos en $C[0,1]$ la norma 1, esto es
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(s)|\, ds$$
Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ el operador dado por
$$Tf(x) = \int_0^x f(s)\, ds$$
Demostrar que $||T|| = 1$.

Ejercicio 8. Sea $\alpha \in (0,1]$ y sea

$$C^\alpha[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \, : \, \sup_{x,y\in[0,1],\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

i) Probar que

$$||f||_\alpha := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x,y\in[0,1],\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

es una norma en $C^\alpha[0,1]$ y que hace de este espacio un espacio de Banach.

Observar que $C^\alpha[0,1]$ está incluido en $C[0,1]$.

ii) Probar que

$$B = \{ f \in C^\alpha[0,1] \, : \, ||f||_\alpha \leq 1 \}$$

es compacto en $C[0,1]$.

Ejercicio 9. Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \phi(x),$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Probar que si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$, entonces f se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$. ¿Y si solo le pedimos que f sea continua y que exista $\nabla f(p)$?