

Ejercicio 1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ probar que existe $H \supseteq A$ de tipo G_δ tal que $|A|_e = |H|$.

Ejercicio 2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

Ejercicio 3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existe A de medida nula con $E \subseteq A$.

- (a) Probar que E tiene medida nula.
- (b) Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c . ¿Cual es el cardinal de los no medibles?

Ejercicio 4. Sea $E = \{x \in (0, 1) : \text{en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$. Probar que E tiene medida nula.

Ejercicio 5.

- (a) Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de \mathbb{R}^2 de medida nula.
- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida nula.
- (c) ¿Y si f tiene finitas discontinuidades?

Ejercicio 6. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $E = A \cup B$ con $|B| = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 8. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por la fórmula $T(x) = x + v$. Probar que

- (a) $|T(E)|_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

Ejercicio 9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r \cdot a : a \in A\}$. Probar que

- (a) $|rA|_e = r^n |A|_e$.
- (b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^n |A|$.

Ejercicio 10. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Denotemos por I' a los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas y por $|E|'_e$ a la medida exterior de un conjunto E relativa a dicho sistema de coordenadas.

- (a) Probar que $|E|'_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (b) Deducir que la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es invariante por rotaciones y simetrías.

Ejercicio 11. Sea $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

- (a) Calcular $|B(0, r)|$ en términos de $|B(0, 1)|$.
- (b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f(r) = |A \cap B(0, r)|$$

es continua.

- (c) Demostrar que si A es medible entonces para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$ existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.
- (d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |A| < +\infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$ existen n subconjuntos disjuntos de A , $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$, tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 12. Sea $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Probar que si $E \subseteq [0, 1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $|T^{-1}(E)| = |E|$.

Ejercicio 13. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ y $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ son medibles.
- (b) $|\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- (c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$ vale que $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < +\infty$ entonces $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- (d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$, entonces $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| = 0$.

Ejercicio 14. Construir un subconjunto C_δ de $[0, 1]$ siguiendo la construcción del conjunto de Cantor excepto que en el k -ésimo paso cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$ para cierto $0 < \delta < 1$.

- (a) Probar que C_δ es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.
- (b) Construir un abierto de \mathbb{R} con frontera de medida positiva.

Ejercicio 15. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- (a) E es medible.
- (b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \setminus F|_e < \varepsilon$.
- (c) Existen H de clase F_σ y N de medida nula tales que $E = H \cup N$.

Ejercicio 16. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

- (a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.
- (b) Si E es acotado y satisface la condición de Carathéodory entonces E es medible.
- (c) E es medible si y sólo si satisface la condición de Carathéodory.

Ejercicio 17.

- (a) Probar que si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de \mathbb{R}^n entonces

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

- (b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de \mathbb{R}^n tal que $|E_k|_e < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

Ejercicio 18. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su medida interior por la fórmula

$$|E|_i = \sup\{|F| : F \subseteq E, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

- (a) $|E|_i \leq |E|_e$.
- (b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.
- (c) Si $|E|_e < +\infty$ y $|E|_i = |E|_e$ entonces E es medible.
- (d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.
- (e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.

- (f) Si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son disjuntos entonces $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

Ejercicio 19. Sea V un conjunto de Vitali. Probar que si $E \subseteq V$ es medible entonces $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

Ejercicio 20.

- (a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ disjuntos tales que $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$.
- (b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right|_i > \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.
- (c) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < +\infty$ y $|E|_e = +\infty$.

Ejercicio 21. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $A \subseteq E$. Probar que

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

Ejercicio 22. Mostrar que existe $H \subseteq [0, 1]$ de clase F_σ con $|H| = 1$ formado únicamente por puntos irracionales.

Ejercicio 23. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

- (a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|I| < \alpha |E \cap I|$.
- (b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.
- (c) Concluir que el conjunto de las diferencias de E definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

Ejercicio 24. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal c .
Sugerencia. Recordar que si α es un cardinal infinito entonces $\alpha^2 = \alpha$.

Ejercicio 25. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que para todo par de puntos $x, y \in E$ se satisface

$$x \neq y \implies \frac{x + y}{2} \notin E.$$

Probar que E tiene medida nula.

Sugerencia. Mostrar que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para todo intervalo I se tiene $|E \cap I| \leq \alpha |I|$.