Preliminares I - Conjuntos e integrales clásicas

Ejercicio 1. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap Y_j)$

(c) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

(e) Si $I = J$ y para todo $i \in I$ se tiene $Y_i \subseteq X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)$$

(f) Si $A \subseteq I$ entonces

$$\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right)$$

(g) Para cada conjunto F se tiene

$$F - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(F - X_i)$$

Ejercicio 2.

(a) Sea $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos indexada en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Probar que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

(b) Encontrar una familia de conjuntos $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k} \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Ejercicio 3. Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos que satisfacen $\bigcup\limits_{l\in L} J_l = I$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L}\left(\bigcup_{i\in J_l} X_i\right)$

(b) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L}\left(\bigcap_{i\in J_l} X_i\right)$

Ejercicio 4. Probar que si A y B son conjuntos tales que $A\times B = (A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$ con $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=\emptyset$, $A_1\times B_1\neq\emptyset$ y $A_2\times B_2\neq\emptyset$ entonces vale que

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1\cup B_2) \text{ ó } (A = A_1\cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B)$$

Ejercicio 5. Sea $f : E\to F$ una función y consideremos dos pares de subconjuntos $A, B\subseteq E$ y $C, D\subseteq F$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

(b) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

(c) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

(d) Si f es inyectiva entonces $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$

(e) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D))\subseteq D$

(f) Si f es inyectiva entonces $f(E-A)\subseteq F-f(A)$

(g) Si f es suryectiva entonces $f(E-A)\supseteq F-f(A)$

(h) $f^{-1}(F-D) = E-f^{-1}(D)$

Ejercicio 6. Sea $f : E\to F$ una función y consideremos dos familias $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_j)_{j\in J}$ de subconjuntos de E y F, respectivamente. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $f(\bigcup\limits_{i\in I} X_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(X_i)$

(b) $f(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(X_i)$

(c) Si f es inyectiva entonces $f(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f(X_i)$

(d) $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} Y_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

(e) $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} Y_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

Ejercicio 7. Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E definimos el *límite inferior* y el *límite superior* de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to\infty} E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $E - \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (E - E_n)$

(b) $E - \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} (E - E_n)$

(c) $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$

Cuando los límites inferior y superior de la sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden decimos que existe el límite de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, en tal caso, denotamos a ambos conjuntos simplemente por $\lim_{n\to\infty} E_n$.

(d) Demostrar que si $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(e) Demostrar que si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(f) Probar que si definimos la sucesión $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E por la fórmula recursiva

$$\begin{cases} D_1 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

entonces existe el límite de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ se define la función $\chi_A : X \to \{0,1\}$ denominada *función característica de* A por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ para todo $x \in X$

(b) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$ para todo $x \in X$

(c) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$ para todo $x \in X$

Ejercicio 9. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \to Y$ una función. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $f(\liminf_{n\to\infty} X_n) \subseteq \liminf_{n\to\infty} f(X_n)$

(b) $f(\limsup_{n\to\infty} X_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(X_n)$

(c) $f(\liminf_{n\to\infty} X_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(X_n)$

(d) Si f es inyectiva entonces en (a) y (b) vale la igualdad.

Ejercicio 10. Sean E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Definimos las clases de conjuntos $R = \{Z \subseteq E : \ f(Z) \subseteq Z\}$ y $S = \{Z \subseteq E : \ f(Z) \supseteq Z\}$. Por último, consideremos también los subconjuntos

$$V = \bigcap_{Z\in R} Z \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{Z\in S} Z.$$

(a) Probar que $f(V) = V$ y $f(W) = W$.

(b) Demostrar que si $A \subseteq E$ es tal que $f(A) = A$ entonces $V \subseteq A \subseteq W$.

Ejercicio 11. Repaso de la integral de Riemann Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada partición $\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ consideramos las sumas inferior y superior de Riemann, definidas respectivamente por:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad S_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \quad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

Consideramos los números:

$$I = \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición } de\ [a, b]\} \quad \text{(integral inferior)}$$

$$S = \inf\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición } de\ [a, b]\} \quad \text{(integral superior)}$$

Finalmente, decimos que f es integrable Riemann en $[a, b]$ si $I = S$, y en ese caso definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ (según Riemann)} = I = S$$

Probar las siguientes afirmaciones:

i) Una función es integrable Riemann en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar una partición π de $[a, b]$ tal que $S(\pi, f) - s(\pi, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, siendo $\omega_i = M_i - m_i$ la oscilación de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

ii) Toda función monótona es integrable Riemann.

iii) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable Riemann.

iv) $\chi_{\mathbb{Q}}$ (función de Dirichlet) no es integrable Riemann.

v) Si $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones integrables Riemann en $[a, b]$ y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$, y se verifica que: $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ (R) = \int_a^b f(x)\,dx\ (R)$

vi) Dar un ejemplo de una sucesión de funciones f_n integrables Riemann en $[a, b]$ tales que f_n esté uniformemente acotada en $[a, b]$ y converja puntualmente en $[a, b]$ a una función f que no sea integrable Riemann en $[a, b]$.