Práctica 7: Medida en Espacios Abstractos

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar o *counting measure*.

(b) Dado $x_0 \in X$,para cada $E \subset X$, definimos $\delta(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida se denomina delta de Dirac.

(c) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ.

(d) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, \ldots, a_n$ constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$

es una medida.

(e) Sea (X, Σ) un espacio medible y sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en este espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$

probar que μ es una medida.

(f) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

Ejercicio 2. Sean (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $A, B \in \Sigma \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $A_n \in \Sigma \ (n \in \mathbb{N}) \ \wedge \ A_n \searrow \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta que $Y \in \Sigma$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Ejercicio 4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea

$$\overline{\Sigma} = \{A \subseteq X\ : A = E \cup M\,;\, E \in \Sigma, M \subseteq N \in \Sigma\,, \mu(N) = 0\}$$

Sobre $\overline{\Sigma}$ se define $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$, si $A = E \cup M$, como en la definición de $\overline{\Sigma}$. Probar:

(a) $\overline{\Sigma}$ es una σ-álgebra.

(b) $\overline{\mu}$ está bien definida sobre $\overline{\Sigma}$.

(c) $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completa.

Ejercicio 5. Sea μ una medida definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ tal que μ toma valores finitos sobre los conjuntos compactos. Sea $\mathcal{H}$ la clase de los conjuntos borelianos E que satisfacen:

(a) $\mu(E) = \text{ínf}\,\{\mu(G), G \supseteq E\,, G\,\text{abierto}\}\,.$

(b) $\mu(E) = \sup\,\{\mu(K), K \subseteq E\,, K\,\text{compacto}\}\,.$

Probar:

(i) Los abiertos y los compactos están en $\mathcal{H}$.

(ii) Si μ es finita, $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra.

(iii) $\mathcal{H}$ coincide con la σ-álgebra de Borel.

Ejercicio 6. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ), tal que por lo menos una de ellas es finita. Si $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E),\ (E \in \Sigma)$, probar que ν es una medida con signo.

Ejercicio 7. Sea ν una medida con signo. Probar:

(a) Si P es un conjunto positivo con respecto a ν y $A \subset P$, entonces A es un conjunto positivo con respecto a ν.

(b) Si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ son conjuntos positivos con respecto a ν, entonces $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} P_i$ también lo es.

Ejercicio 8. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible $(\Omega,)$. Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $\Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in\}$.

Ejercicio 9. Sean $(\Omega, , \mu)$ un espacio de medida y f tal que existe $\int_\Omega f d\mu$. Si $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in$, probar que:

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu \ , \ \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

Ejercicio 10.

(a) Sean λ y μ medidas sobre $(\Omega,)$ y $\lambda(\Omega) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

Ejercicio 11. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathcal{M}, \delta)$ donde $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

(a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x)dx \qquad (\forall\, A \in \mathcal{M}).$$

(b) Dada $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

Ejercicio 12. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ) . Si para todo $\epsilon > 0$ existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \varnothing,\ \ A_\epsilon \cup B_\epsilon = X,\ \ \mu(A_\epsilon) < \epsilon \ y\ \nu(B_\epsilon) < \epsilon\ ,$$

probar que existen $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \varnothing,\ \ A \cup B = X,\ \ \mu(A) = 0 = \nu(B).$$

Ejercicio 13. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f\, d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 14. Sean $(\Omega,)$ un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada finita definidas en , tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f\,d\nu = \int fg\,d\mu \quad \forall f \text{ medible tal que} \int f\,d\nu \text{ existe .}$$

(b) Probar que $\{x \in \Omega : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 15. Sea $(\Omega,)$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas finitas en $(\Omega,)$. Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\bar{\mu} = \mu + \nu$.

(a) Probar que existe una función $f \in L^1(\bar{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\bar{\mu}$ y que $0 \leq f \leq 1$ $\bar{\mu} - a.e.$

(b) Deducir que $\int g\,d\nu = \int gf\,d\bar{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

(c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h\,d\mu$ para todo $E \in$ entonces $h = \dfrac{f}{1-f}$ $\mu - a.e.$
Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1-f)d\nu = \int gfd\mu$ y elegir una g adecuada.

Ejercicio 16. Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu(-\infty, x]$. Probar:

(a) $\mu \ll m$ si y solo si f es absolutamente continua y en ese caso $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(b) $\mu \perp m$ si y solo si $f' = 0$ en casi todo punto respecto de m.

Ejercicio 17. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, considerar la medida μ_X definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}^n$, por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A))\ .$$

Probar que para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable respecto de μ_X, y para todo boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$ vale,

$$\int_A f(y)\,d\mu_X \;=\; \int_{X^{-1}(A)} f(X)\,d\mu\ .$$

Ejercicio 18. Sean $(\Omega, , P)$ un espacio de probabilidad , $(X,Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio y P_{XY} la medida inducida por (X,Y) sobre los borelianos de $\mathbb{R}^2$. Probar que si $P_{XY} \ll m$, siendo m la medida de Lebesgue, entonces P_X y P_Y tambiÃ©n lo son y hallar sus funciones de dendidad , esto es, sus derivadas de Radon-Nikodym respecto de m .

Ejercicio 19. Sea $X = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Sea $\sigma(X)$ la σ-álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\sigma(X)$.

(b) Probar que si la variable aleatoria Y es $\sigma(X)$-medible entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i. Concluir que Y puede expresarse como función de X.

Ejercicio 20. Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de los borelianos de Ω y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos en $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \qquad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

Ejercicio 21.

(a) Dados un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ y una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ tal que $\int_\Omega f \, dP = 1$, sea ν la medida definida sobre $(\Omega, \mathcal{U})$ por

$$\nu(A) = \int_A f \, dP \ .$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable, vale que

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g \, f \, dP \ .$$

(b) En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria y supongamos que μ_X tiene función de densidad f. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$Y = g(X)$$

es integrable. Mostrar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) \, dx.$$

Ejercicio 22. Sea $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, , P)$. Hallar

(a) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$

(b) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, $B \in$

(c) $E(X|Y)$ con Y una variable aleaotoria que toma los valores y_i con probabilidad p_i, $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 23. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$. Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \qquad \text{con} \qquad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \, dx.$$

Sugerencia:

(a) $\Phi(Y)$ es $\sigma(Y)$-medible.

(b) Sea $A \in \sigma(Y)$ y sea B un boreliano de $\mathbb{R}$ tal que $A = Y^{-1}(B)$.

Probar que

1. $\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x,y)\, dy dx$.
2. $\int_A \Phi(Y)\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x,y)\, dy dx$.
3. $\int_A X dP = \int_A \Phi(Y)\, dP\,,$ para todo $A \in \sigma(Y)$.