Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica 7: Introducción a las ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales donde $y = y(x)$:

(*a*) $y' = y^2$

(*b*) $yy' = x$

(*c*) $xy' = y$

(*d*) $y' = \dfrac{x + \sin x}{3y^2}$

(*e*) $x^2y' + y = 0$

(*f*) $0 = e^{-y}y' + \cos x$

(*g*) $y' = e^{-y+2x}$

(*h*) $y' = 1 + x - y - xy$

(*i*) $y' = \dfrac{\ln x}{xy + xy^3}$

Ejercicio 2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con la condición inicial dada.

(*a*) $y' = \dfrac{\sin x}{\sin y}$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

(*b*) $ye^{-x}y' = x$, $y(0) = 1$.

(*c*) $y' = \dfrac{2x+1}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$.

(*d*) $y' = \dfrac{1+x}{xy}$, $y(1) = -4$.

Ejercicio 3.

(*a*) Hallar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = 1$ y que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en cada punto x es $\dfrac{f(x)^2}{x^3}$.

(*b*) Se sabe que el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corta al eje y en $(0,7)$ y que en cada punto (x,y) la recta tangente tiene pendiente $4x^3y$. Hallar f.

Ejercicio 4. En cierta región se observa que la velocidad de cambio del número de lobos $N(t)$ es directamente proporcional a $650 - N(t)$ donde t mide el tiempo en años. Cuando $t = 0$ la población es de 300 lobos y cuando $t = 2$ la población se incrementó a 500. Hallar la población al cabo de 3 años.

Ejercicio 5. Un tanque contiene 1000 litros de agua pura. Una salmuera que contiene $0,05$ kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 litros por minuto. Una otra salmuera que contiene $0,04$ kg de sal por litro de agua entra a razón de 10 litros por minuto. La solución se mantiene perfectamente mezclada y sale del tanque a razón de 15 litros por minuto.

(*a*) Determine la cantidad de sal que queda en el tanque al cabo de t minutos.

(*b*) Determine la concentración de sal en el tanque al cabo de t minutos.

Ejercicio 6. La difusión a través del tiempo t de una enfermedad en una población fija de M individuos se suele modelar mediante la ecuación diferencial atribuida al biólogo belga P.F. Verhulst:

$$y' = ky(M - y), \tag{1}$$

donde k es una constante positiva e y es una función que depende del tiempo t indicando el número de individuos afectados en ese instante t.
Observar que la ecuación (1) indica que la tasa de aumento del número de enfermos es proporcional tanto al número de individuos afectados como a aquellos que no lo están.

(a) Demostrar que existe una constante C tal que $y(t) = \dfrac{CM}{C + e^{-Mkt}}$.

(b) Interpretar el gráfico de la función $y(t)$.

(c) Hallar la constante C si la población es de 5000 individuos y en el instante $t = 0$ había 100 afectados.

(d) Con los datos del item anterior, si además se sabe que al cabo de 2 días ya son 500 los afectados, ¿en cuánto tiempo la enfermedad afectará a la mitad de la población?

Ejercicio 7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

(a) $y' + 5y = e^{5x}$

(b) $y' - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $3y + \sin(2x) = y'$

(d) $e^x y' + 4e^x y = 1$

(e) $y' \cos x - y \sin x = \cos x$

(f) $xy' - ay = bx^4$, con a y $b \in \mathbb{R}$

Ejercicio 8. En la conservación de alimentos, el azúcar de caña sufre un proceso de inversión y se transforma en glucosa y fructosa. En soluciones diluidas, el ritmo de inversión es proporcional a la concentración $y(t)$ de azúcar inalterada. Si dicha concentración es $\frac{1}{50}$ cuando $t = 0$ y $\frac{1}{200}$ tras 3 horas, hallar la concentración de azúcar inalterada después de 6 y 12 horas.

Ejercicio 9. La velocidad de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había originalmente?

Ejercicio 10. La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente que lo rodea. Supongamos que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 70° y que un objeto se enfría de 350° a 210° en 30 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfríar dicho objeto hasta una temperatura de 105° ?

Ejercicio 11. Un depósito contiene 50 litros de una solución compuesta de $90\,\%$ de agua y $10\,\%$ de alcohol. Se vierte en el depósito una segunda solución que contiene $50\,\%$ de agua y $50\,\%$ de alcohol a razón de 4 litros por minuto. Al mismo tiempo se vacía el depósito a razón de 5 litros por minuto. Supongamos que la solución del depósito se agita constantemente. ¿Cuánto alcohol queda en el depósito después de 10 minutos?

Ejercicio 12. Se deja caer un objeto de masa m desde un helicóptero.

(a) Hallar su velocidad en función del tiempo t suponiendo que la fuerza de resistencia debida al aire es proporcional a la velocidad del objeto.

(b) Calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Este número se denomina *velocidad terminal*. Interpretar físicamente.

Ejercicio 13. Se inyecta glucosa por vía intravenosa a razón de q unidades por minuto. El cuerpo elimina del flujo sanguíneo la glucosa a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Sea $Q(t)$ la cantidad de glucosa presente en la sangre en el instante t .

(a) Hallar la ecuación diferencial que describe el ritmo de cambio de la glucosa en sangre en función del tiempo.

(b) Resolver dicha ecuación diferencial para la condición inicial $Q(0) = Q_0$.

(c) Calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$.

Ejercicio 14. Un depósito de 200 litros está lleno hasta la mitad de agua destilada. Se comienza a verter en el depósito una solución de agua y sal de concentración $0,5\,\mathrm{kg/l}$ a un ritmo de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo se extrae la solución resultante (convenientemente agitada) a razón de 3 litros por minuto. En el instante en que se llene el depósito ¿cuál será la concentración de sal en la solución?