# Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

## Segundo Cuatrimestre 2015

## Práctica 6: Integración

**Ejercicio 1.**

(*a*) Hallar en cada caso una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla

(i) $g'(x) = 2$.

(ii) $g'(x) = x$.

(iii) $g'(x) = \text{sen } x$.

(iv) $g'(x) = \cos x$.

(v) $g'(x) = x^2$.

(vi) $g'(x) = e^x$.

(vii) $g'(x) = x + x^2$.

(viii) $g'(x) = x^n$.

(*b*) ¿Son únicas la funciones halladas?

(*c*) Para cada uno de los items (i) a (iv) hallar una función $g$ que cumpla, además, $g(0) = 5$.

(*d*) Para cada uno de los items (v) a (viii) hallar una función $g$ que cumpla, además, $g(1) = -1$.

**Ejercicio 2.** Verifique en cada caso que $F(X) + C$ (para $C \in \mathbb{R}$) son primitivas de $f(x)$.

(*a*) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad F(x) = \ln |x|$.

(*c*) $f(x) = e^x$ $\qquad F(x) = e^x$.

(*d*) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad F(x) = -\cos x$.

(*e*) $f(x) = \cos x$ $\qquad F(x) = \text{sen}\, x$.

(*f*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad F(x) = \text{arc sen}\, x$.

(*g*) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad F(x) = \text{arc cos}\, x$.

(*h*) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad F(x) = \text{arc tg}\, x$.

(*i*) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad F(x) = \text{tg}\, x$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $\qquad F(x) = -\operatorname{cotg} x.$

**Ejercicio 3.** Calcule las siguientes primitivas

(*a*) $\displaystyle\int x^2\,dx\,.$

(*b*) $\displaystyle\int x^{100}\,dx\,.$

(*c*) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx\,.$

(*d*) $\displaystyle\int (3x - \cos x + 2\operatorname{sen} x)\,dx\,.$

(*e*) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + 2x - e^x\right)\,dx\,.$

(*f*) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{x})\,dx\,.$

(*g*) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\,dx\,.$

(*h*) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,.$

**Ejercicio 4.** Aplicando el método de sustitución calcule las siguientes primitivas

(*a*) $\displaystyle\int 5\cos(5x)\,dx\,.$

(*b*) $\displaystyle\int \cos(x+5)\,dx\,.$

(*c*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(7x)\,dx\,.$

(*d*) $\displaystyle\int (t+1)(t^2+2t+3)^{\frac{2}{3}}\,dt\,.$

(*e*) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx\,.$

(*f*) $\displaystyle\int (x+1)^{-1}\,dx\,.$

(*g*) $\displaystyle\int x^{-1}\ln x\,dx\,.$

(*h*) $\displaystyle\int (x+1)^{-1}\ln(x+1)\,dx\,.$

(*i*) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx\,.$

(*j*) $\displaystyle\int x(x^2+1)^{-1}\,dx\,.$

(*k*) $\displaystyle\int \cos x\operatorname{sen}^{-2} x\,dx\,.$

(*l*) $\displaystyle\int (5-2x)^{-1}\,dx\,.$

(*m*) $\displaystyle\int \cos^{-2}(2x)\,dx\,.$

(*n*) $\displaystyle\int x^{-1}\cos(\ln x)\,dx\,.$

(*ñ*) $\displaystyle\int x(1+3x^2)^{-1}\,dx\,.$

(*o*) $\displaystyle\int (1+y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,dy\,.$

(*p*) $\displaystyle\int (x^2+2x+5)^{-1}\,dx\,.$

(*q*) $\displaystyle\int x(16+x^4)^{-1}\,dx\,.$

**Ejercicio 5.** Calcule las siguientes primitivas aplicando el método de integración por partes.

(*a*) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx\,.$

(*b*) $\displaystyle\int (x^2-2)e^{-x}\,dx\,.$

(*c*) $\displaystyle\int x^3\cos x\,dx\,.$

(*d*) $\displaystyle\int x\ln x\,dx\,.$

(*e*) $\displaystyle\int x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,.$

(*f*) $\displaystyle\int (t^2+t)(t+1)^{-5}dt\,.$

(*g*) $\int \ln x \; dx$.

(*h*) $\int \arccos x \, dx$.

(*i*) $\int e^x \cos x \, dx$.

(*j*) $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, dx$.

**Ejercicio 6.** Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x+2)(x+3)}$.

(*b*) $f(x) = 4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1}$.

(*c*) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-4}$.

(*d*) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$.

(*e*) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.

(*f*) $f(x) = (x^2-1)^{-2}$.

(*g*) $f(x) = \dfrac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x}$.

(*h*) $f(x) = \dfrac{8x^3+7}{8(x+1)(x+\frac{1}{2})^2}$.

(*i*) $f(x) = \dfrac{2(2x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{3}{(x^2+2x+3)(x+2)}$.

**Ejercicio 7.** Calcule las siguientes primitivas:

(*a*) $\int \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}} \, dx$.

(*b*) $\int x^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx$.

(*c*) $\int \dfrac{\ln^3 x}{x} \, dx$.

(*d*) $\int x \arcsin x \, dx$.

(*e*) $\int (1+\cos 2x)^{-2} \operatorname{sen} x \, dx$.

(*f*) $\int \dfrac{(\operatorname{sen} x - 2)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2} \, dx$.

(*g*) $\int \dfrac{x e^{3x^2}}{4+e^{3x^2}} \, dx$.

(*h*) $\int \operatorname{tg} x \; \ln(\cos x) \, dx$.

(*i*) $\int x(\operatorname{sen} x + \frac{x}{2}\cos x)\sqrt{x^2 \operatorname{sen} x} \, dx$.

(*j*) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}} \, dx$.

(*k*) $\int x^5 \sqrt[5]{5-x^2} \, dx$.

(*l*) $\int \operatorname{sen}^5\left(\dfrac{x}{6}\right) \cos\left(\dfrac{x}{6}\right) \, dx$.

(*m*) $\int \dfrac{x - \sqrt{\operatorname{arc\,tg} 2x}}{1+4x^2} \, dx$.

(*n*) $\int \ln(x^2+1) \, dx$.

(*ñ*) $\int \dfrac{e^x + 3e^{2x}}{1-e^{2x}} \, dx$.

(*o*) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

(*p*) $\int \dfrac{\ln x + 1}{x(\ln^2 x - 3\ln x)} \, dx$.

(*q*) $\int (x^3+x)\cos(x^2+1) \, dx$.

(*r*) $\int \sqrt{e^x+1} \, dx$.

(*s*) $\int \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x} \, dx$.

(*t*) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

**Ejercicio 8. ($\star$)** Calcular las siguientes primitivas:

(*a*) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

(*b*) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

(*c*) $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx$.

**Ejercicio 9.**

(*a*) Hallar $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$.

(*b*) Hallar $g(x)$ tal que $g'(x) = t\ \operatorname{sen}(5t)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(*c*) Hallar $h(x)$ tal que $h'(x) = \dfrac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$.

**Ejercicio 10. ($*$)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Sabemos que $f$ tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de $f$ pasa por el punto $(2;3)$ y que $f'(x) = -x + a$ para cierto $a \in \mathbb{R}$. Hallar $f(x)$.

**Ejercicio 11.** Aplicando la Regla de Barrow, calcular

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$

(*b*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

(*c*) $\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$

(*d*) $\displaystyle\int_1^x t^r\,dt$ (donde $x > 1$)

(*e*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sen}\ t\,dt$

**Ejercicio 12.** Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$. Sabemos que $x - 2$ es un factor de $f$.

(*a*) Determine $a$ y factorice $f(x)$ totalmente.

(*b*) Haga un gráfico aproximado de $f(x)$.

(*c*) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\ dx$ ; $\displaystyle\int_{2}^{2{,}5} f(x)\ dx$ ; $\displaystyle\int_{-1}^{2{,}5} f(x)\ dx$.

**Ejercicio 13.** Aplicando los métodos de sustitución e integración por partes calcule las siguientes integrales definidas.

(*a*) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^{-3}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)^{-2} \operatorname{sen}(2x)\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int_3^7 x \ln x\,dx$

(*d*) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

(e) $\int_1^4 x^{-1}\cos(\ln\ x)\,dx$

(f) $\int_0^1 e^x(4+3e^x)\,dx$

(g) $\int_3^9 x\sqrt{x+1}\,dx$

(h) $\int_0^1 e^x(e^{2x}+e^x+1)^{-1}\,dx$

**Ejercicio 14.** Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f_1(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$.

(b) $f_2(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

(c) $f_3(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos\ t}{1+t^2}\,dt$.

(d) $f_4(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc\,tg} t\,dt$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

(e) $f_5(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t}dt$.

(f) $f_6(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2}dt$.

(g) $f_7(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2)dt$.

(h) $f_8(x) = \int_{\cos x}^{e^x} t^2 dt$.

**Ejercicio 15. ( $*$ )** Muchas de las integrales más importantes que se usan no admiten (en un sentido que no vamos a precisar) primitivas elementales. Este es el caso de la función:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt\,.$$

Calcular su polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$.¿Coincide con la integral del polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ de $g(x) = e^{-x^2}$?

**Ejercicio 16. ( $*$ )** Calcular el límite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\displaystyle\int_{x+2}^{e^x+1} \frac{1}{\ln(t)}\,dt}{\ln(x+1)}$.

**Ejercicio 17.** Determine los máximos y mínimos locales de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4)\,dt$$

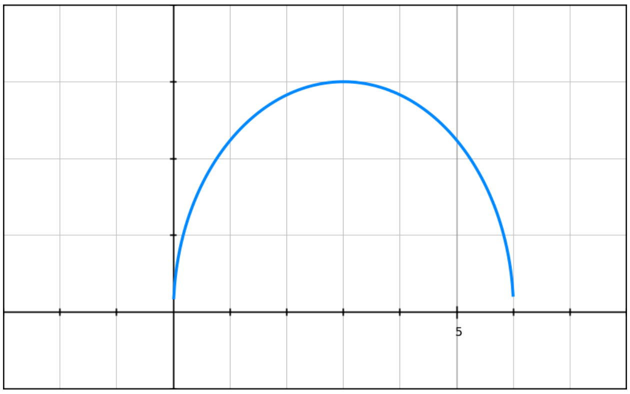


Figura 1: Gráfico de $F$

**Ejercicio 18.** Sea $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ una función continua, y sea $F(x) = \int_0^x F(t)\, dt$. Si el gráfico de $F(x)$ es:

(a) Calcule $\int_0^6 f(t)\, dt$.

(b) Verifique que $f(3) = 0$.

(c) Verifique que $f(x) > 0$ en $[0; 3)$, y $f(x) < 0$ en $(3; 6]$.

(d) Demuestre que $\int_0^6 |f(t)|\, dt = 2 \int_0^3 f(t)\, dt = 6$.

**Ejercicio 19.** Calcule el área de la región limitada por:

(a) La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje $x$ y las rectas $x = 1, x = 2$.

(b) La recta $y = -x + 5$, el eje $x$ y las rectas $x = 6$, $x = 9$.

**Ejercicio 20.** En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje $x$ y las rectas verticales indicadas.

(a) $y = x^3$ , $x = 2$ , $x = 5$.

(b) $y = x^2 - x + 1$ , $x = 0$ , $x = 1$.

(c) $y = x + \frac{1}{x}$ , $x = 1$ , $x = 2$.

**Ejercicio 21.** Determine $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que el área de la región encerrada entre el eje $x$, el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ sea $\frac{5}{2}$.

**Ejercicio 22.** Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso (*a*) $y = 3x^2 - 7x$ , $y = x^2 + x - 6$

(*b*) $y^2 = x$ , $x - y = 2$

(*c*) $y = x^{1/3}$ , $x = 0$ , $y = 1$ **(**$*$**)**

(*d*) $y = e^x$ , $y = e^{-x}$ , $x = 1$ , $x = -1$

(*e*) $y = x^{1/2}$ , $y = x - 2$ , $x = 0$ **(**$*$**)**

(*f*) $y = x^2 - 1$ , $y = -x$

(*g*) $y = x^3 - x$ , $y = x$ **(**$*$**)**

(*h*) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a dicha curva en $x = 1$.

(*i*) $3y^2 - 3y = x - 1$ , $2y^2 - 2y = x - 3$

**Ejercicio 23.** Sean $p(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es $a(t) = 4t - 16$ y tal que la posición inicial era $p(0) = 0$, y la velocidad inicial $v(0) = 30$.

(*a*) Determinar $v(t)$ y verificar que la velocidad es nula para $t = 3$.

(*b*) Obtener la expresión de $p(t)$ y calcular la posición para $t = 3$.

**Ejercicio 24.** Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante $t$ está dada por $a(t) = t(t - 100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición $s_0$, y su velocidad inicial era $25$. ¿Cuál es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

**Ejercicio 25.** **(**$*$**)** Una nave espacial está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea $a(t) = t^{1/2} + 1$ cuando $t > 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en $m/s^2$.

(*a*) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron $64$ segundos desde el arranque?

(*b*) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

**Ejercicio 26.** **(**$*$**)** El corredor $H_1$, que es especialista en los $100$ metros llanos desarrolla una velocidad instantánea $v_1(t) = 10(1 - e^{-3t})$ donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor $H_2$ tiene una velocidad instantánea $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$.

(*a*) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros $10$ segundos de carrera?

(*b*) ¿Y en los primeros $20$ segundos?

(*c*) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de $100$ metros?

(*d*) ¿Y una carrera de $200$ metros?