Análisis Matemático I (Lic. en Cs. Biológicas)

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica 5: Regla de L'Hospital - Estudio de funciones

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos indicados en cada caso:

(*a*) $f(x) = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 17$ en $[-1;1]$.

(*b*) $f(x) = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 17$ en $[0;1]$.

(*c*) $f(x) = |x|$ en $[-1;1]$.

(*d*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $[-3;5]$.

(*e*) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0;4]$.

Ejercicio 2. Se considera la función $f : [-2;2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2;1] \\ 3x-2 & \text{si } x \in (1;2] \end{cases}$$

(*a*) Verificar que $f(x)$ es continua en $[-2;2]$, y que $f(-2) = f(2)$.

(*b*) Comprobar que f no es derivable en $x_0 = 1$.

(*c*) Verificar que $f'(0) = 0$.

(*d*) ¿Contradice este ejemplo el Teorema de Rolle?

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ mostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales distintas.

Ejercicio 4. La temperatura (en grados centígrados) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo con la siguiente ley: $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t el tiempo medido en horas.
Sin usar la derivada de T, mostrar que en algún instante del lapso $[0;4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

Ejercicio 5. Decidir si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Lagrange en los intervalos indicados en cada caso. Si la respuesta es afirmativa determinar c perteneciente al correspondiente intervalo abierto tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y graficar.

(*a*) $f(x) = 2x^3 - 6x$ en $[-2;2]$.

(*b*) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0;5]$.

(*c*) $f(x) = (x-1)^2$ en $[0;3]$.

(*d*) $f(x) = (x-1)^2$ en $[3;5]$.

Ejercicio 6. Mostrar que valen las siguientes desigualdades aplicando el teorema de Lagrange.

(*a*) $\operatorname{sen} x \leq x, \quad \forall x \geq 0.$

(*b*) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(*c*) $\ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0.$

Ejercicio 7. Calcular los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hospital, siempre que ello sea posible:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$

(*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ **(∗)**

(*c*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$

(*d*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(*e*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ **(∗)**

(*f*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \operatorname{sen} x}$

(*g*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi - 2x}$ **(∗)**

(*h*) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi - 2x}$

(*i*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$

(*j*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

(*k*) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{4x^5}$

(*l*) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

(*m*) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ **(∗)**

(*n*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$

(*ñ*) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln \dfrac{1}{x}$

(*o*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$ **(∗)**

(*p*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$ **(∗)**

(*q*) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

(*r*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ **(∗)**

(*s*) $\lim\limits_{x \to 0} (x - \operatorname{sen} x) \ln x$

(*t*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x \ln x}$ **(∗)**

(*u*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x} \right)$ **(∗)**

(*v*) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

(*w*) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\operatorname{cotg} x}$

(*x*) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ **(∗)**

(*y*) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(*z*) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{1 - \ln x}}$ **(∗)**

Ejercicio 8. ¿Es aplicable la regla de L'Hospital para calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\ x}$$

Si la repuesta es afirmativa, aplicar la regla y calcule el límite. Si la respuesta es negativa, explicar por qué no se puede aplicar la regla y calcular el límite de otra manera.

Ejercicio 9. (∗) Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$.

Ejercicio 10. (∗) En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-4} & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{20\ \operatorname{sen}(x-4)\ln(\frac{3}{4}x-2)}{x-4} + 12 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x\left(\dfrac{1}{3x^2+2x}\right)^{\operatorname{sen}\ x} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 11. Calcular (si existe) $f'(0)$ para las siguientes funciones

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 12. Determinar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = 3x+1$ en $[-1;3]$

(*b*) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $[0;\pi]$

(*c*) $f(x) = |x-2|$ en $[-1;1]$

Ejercicio 13. Decidir si x_0 es un extremo local de f en cada caso:

(*a*) $f(x) = x^2+1, \qquad x_0 = 0.$

(*b*) $f(x) = |x-2|, \qquad x_0 = 2.$

(*c*) $f(x) = x^6+5, \qquad x_0 = 0.$

(*d*) $f(x) = x^3, \qquad x_0 = 0.$

Ejercicio 14. Determinar todos los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = x^3-6x+2$

(*b*) $f(x) = x^2e^{-x}$

(*c*) $f(x) = x\ln\ x \quad (x>0)$

(*d*) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$

(*e*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

(*f*) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$ **(∗)**

(*g*) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ **(∗)**

(*h*) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x} \ (0 \neq x \neq 1)$ **(∗)**

Ejercicio 15. Hallar y clasificar los extremos locales de las siguientes funciones. Graficar.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ejercicio 16. (⋆) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones:

(i) $f'(-1) = f'(-\frac{1}{2}) = f'(0) = f'(\frac{3}{2}) = 0$.

(ii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{3}{2})$.

(iii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

A partir de todos estos datos determinar todos los máximos y mínimos locales de la función f. Justifique sus afirmaciones. Graficar una función que cumpla con estas condiciones.

Ejercicio 17. Para cada una de las siguientes funciones estudiar el dominio natural, las posibles asíntotas. Determinar los máximos y mínimos locales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Analizar el sentido de la curvatura y los puntos de inflexión. Sobre la base de todos estos datos, hacer un gráfico aproximado de f.

(*a*) $f(x) = 12x^2(x+1)$

(*b*) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x}$

(*d*) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$ en $[-1;1]$

(*e*) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(*h*) $f(x) = e^{-x^2}$

(*i*) $f(x) = x \ln x$

(*j*) $f(x) = xe^{-x}$

(*k*) $f(x) = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

(*l*) $f(x) = e^x(x^2+2)$

(*m*) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

(*n*) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

(*ñ*) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$

(*o*) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(*p*) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$

(q) $f(x) = xe^x$

(r) $f(x) = x^2 + |x|$

(s) $f(x) = x - \ln\, x$

Ejercicio 18. Mostrar que se verifican las siguientes desigualdades entre las funciones dadas.

(a) $\operatorname{sen} x \geq x \quad \forall x \leq 0.$

(b) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(c) $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1) \quad \forall x > 1.$

(d) $1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(e) $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x} \quad \forall x > 0.$

Ejercicio 19. (∗) La función $f(t) = \dfrac{t}{20t^2 + 50t + 80}$ (definida para $t \geq 0$) expresa la concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis. Analizar las variaciones de dicha concentración con el paso del tiempo, indicando los intervalos de tiempo en los cuales la concentración aumenta y aquellos en los cuales disminuye.

Ejercicio 20. (∗) La densidad del agua a 0° C es de $1\,\mathrm{g/cm}^3$ pero varía levemente al variar la temperatura de acuerdo con la expresión:

$$S(t) = 1 + 5{,}3 \cdot 10^{-5} t - 6{,}53 \cdot 10^{-6} t^2 + 1{,}4 \cdot 10^{-8} t^3$$

donde $0 \leq t < 100$ que mide la temperatura en grados centígrados, y $S(t)$ es la densidad o peso específico del agua a la temperatura t. Sobre la base de dicha expresión, analizar el crecimiento y decrecimiento de la densidad en función de la temperatura del agua.

Ejercicio 21. (⋆)

(a) Mostrar que una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con $a \neq 0$) puede tener a lo sumo dos extremos relativos.

(b) Dar un ejemplo de una tal función con dos extremos relativos.

(c) Dar un ejemplo de una tal función sin extremos relativos.

(d) ¿Puede una tal función tener un único extremo relativo? ¿Por qué?

Ejercicio 22. Expresar el número 16 como suma de dos números cuyo producto sea máximo.

Ejercicio 23. De una pieza rectangular de cartón de $25\,\mathrm{cm}$ de largo y $10\,\mathrm{cm}$ de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

Ejercicio 24. Un rectángulo está inscripto en un semicírculo de radio 10 (es decir que sus cuatro vértices están en el perímetro del semicírculo). Calcular las dimensiones del rectángulo que hacen máxima su área.

Ejercicio 25. ($*$) Si hacemos girar en el espacio un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, genera, en su rotación, un cono circular recto. ¿Cuál será el mayor volumen V de un cono generado de esta manera por un triángulo cuya hipotenusa mide $6\,\mathrm{cm}$?
(Volumen del cono: $\frac{1}{3}\cdot$ (sup. de la base) $\cdot$ (altura).)

Ejercicio 26. ($*$) Entre todos los rectángulos de área A determinar:

(a) aquél que tiene perímetro mínimo.

(b) aquél que tiene la diagonal más corta.

Ejercicio 27. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$ determinar cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

Ejercicio 28. ($*$) Se desea construir una caja de base cuadrada con tapa, y que tenga $1\,\mathrm{dm}^3$ de capacidad. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha caja para que la cantidad de material utilizado en su confección sea mínima?

Ejercicio 29. ¿Cuándo es mínima la suma de un número x y el cuadrado de su recíproco (es decir, su inverso multiplicativo)?

Ejercicio 30. Se realizaron 10 mediciones de una magnitud física y se obtuvieron los valores

$$2 \qquad 1,9 \qquad 2,2 \qquad 2,3 \qquad 2 \qquad 1,8 \qquad 1,9 \qquad 2,1 \qquad 2 \qquad 1,8.$$

Para cada valor x atribuido a dicha magnitud llamamos $S(x)$ a la suma de los cuadrados de los errores cometidos por dichas mediciones, es decir:

$$S(x) = (x-2)^2 + (x-1,9)^2 + (x-2,2)^2 + \cdots$$

Verificar que $S(x)$ es mínima cuando x es el promedio de las mediciones obtenidas.

Ejercicio 31. ($\star$) Consideremos la función $\log_+(x) = \text{máx}\{0, \log(x)\}$, es decir, dado x, la función $\log_+(x)$ es el mayor valor entre 0 y $\log(x)$. Por ejemplo, $f(3) = \log(3)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$ pues 0 es más grande que $\log(\frac{1}{2})$.

(a) Determinar el dominio de definición de $\log_+$. ¿Qué tipos de discontinuidades tiene? De tener una discontinuidad evitable, redefinir la función para que quede continua.

(*b*) Estudiar la derivabilidad de $\log_+$.

(*c*) Considermos la función $g(t) = \log_+(s+t) - \log_+(s) - \log_+(t)$ para $t > 0$ y s algún número real positivo fijo. Estudiar los máximos de $g(t)$.

(*d*) Hacer lo mismo del ítem anterior pero para $h(s) = \log_+(s+t) - \log_+(s) - \log_+(t)$ para $s > 0$ y t algún número real positivo fijo.

(*e*) Concluir[1] de los ítems anteriores que $\log_+(s+t) - \log_+(s) - \log_+(t) \leq \log(2)$ para todo $s, t > 0$.

Ejercicio 32. La siguiente función describe (en millones de habitantes) la población de un país como función del tiempo t medido en años $(1950 \leq t \leq 2000)$.

$$P(t) = \frac{80}{1 + 3e^{-\frac{t-1950}{10}}}$$

(*a*) Determinar la tasa instantánea de crecimiento de P en el año t.

(*b*) ¿En qué momento P tuvo la máxima tasa instantánea de crecimiento?

Ejercicio 33. ($*$) Un Laboratorio vende una droga hasta 100 gramos por comprador, pero con un mínimo de 40 gramos por compra. El precio (por gramo) será de $\$15$ si vende precisamente 40 gramos, pero se ofrece bajar el precio individual en $\$0,10$ por cada gramo que exceda los 40. ¿Cuántos gramos de la droga debe vender para que el ingreso total del laboratorio, por cliente, sea máximo? (Notar que si vende 50 gramos a un mismo cliente, cada gramo cuesta $\$14$.)

Ejercicio 34. ($*$) En la producción y comercialización de un producto la función de demanda y la función de costo dependen de la cantidad x (con $0 \leq x \leq 15$) respectivamente por:

$$f(x) = 70 - \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{15}; \qquad C(x) = 50x + 5$$

Si la función de ganancias de la operación está dada por $G(x) = xf(x) - C(x)$ determinar el valor de x para el cual se obtiene la mayor ganancia.

Ejercicio 35.

(*a*) Reconstruir un polinomio $P(x)$ de grado 3 del que sabemos que $P(0) = 2$, $P'(0) = 3$, $P''(0) = 6$ y $P'''(0) = -4$.

[1] El objetivo de este ejercicio es mostrar que las técnicas de hallar máximos y mínimos pueden usarse incluso para funciones en más de una variable. La desigualdad probada en este ejercicio está relacionada con lo que se conoce como el primer teorema principal de la Teoría de Nevanlinna

(*b*) Sea $Q(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $Q(2) = -1$, $Q'(2) = 3$ y $Q''(2) = 4$. Expresar dicho polinomio en potencias de $(x-2)$.

(*c*) Expresar el polinomio $Q(x)$ en la forma habitual, es decir en potencias de x.

Ejercicio 36. Para cada una de las siguientes funciones calcular el polinomio de Taylor de grado pedido, en el punto indicado.

(*a*) $f(x) = \ln x$ grado 4, $a = 1$.

(*b*) $f(x) = \cos x$ grado 6, $a = 0$.

(*c*) $f(x) = \operatorname{sen} x$ grado 7, $a = 0$.

(*d*) $f(x) = e^x$ grado 4, $a = 1$.

(*e*) $f(x) = e^x$ grado 4, $a = 0$.

(*f*) $f(x) = \operatorname{sen} x$ grado 4, $a = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 37.

(*a*) Utilizando la parte (e) del problema anterior, calcular aproximadamente $e^{0,2}$.

(*b*) Utilizando la parte (a) del problema anterior, calcular aproximadamente $\ln(0,9)$.

(*c*) Calcular los valores mencionados en (a) y (b) con una calculadora. Comparar con los valores obtenidos anteriormente.

Ejercicio 38. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ es $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.

(*a*) Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

(*b*) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x^2 - 3x + 2)$. Calcular $h'(2)$ y $h''(2)$.

Ejercicio 39. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 2$ es $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 3$.

(*a*) Calcular $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.

(*b*) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 f(x^4 + 1)$. Calcular $h'(-1)$ y $h''(-1)$.