

ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica 3: Límites y continuidad

Ejercicio 1. Usando las propiedades básicas de los límites de funciones calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2)\sqrt{3x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+5}}{x + 2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x + 3} - \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad (*)$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1} - 3} \quad (*)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \tan x}{\cos(\frac{2x}{3})} \quad (*)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} \text{ con } t \in \mathbb{R}, t \text{ fijo } (*)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 9x + 2}{x^2 - 4} \quad (*)$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - b^3}{x - b} \quad (*)$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (*)$$

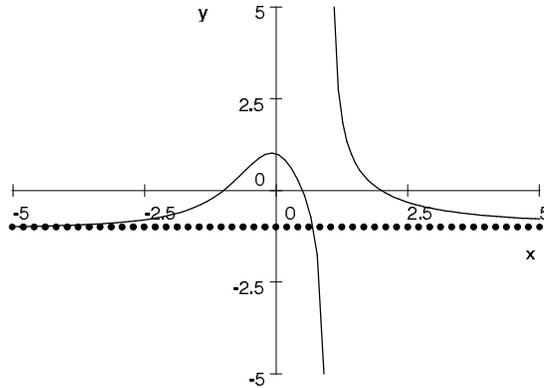
Ejercicio 2.

(a) Hacer un gráfico aproximado de $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Verificar gráficamente que vale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$.

Ejercicio 3. Consideremos una función $f(x)$ cuyo gráfico es:



- (a) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.
- (b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -1$?
- (c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?
- (d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = m$, donde m es un determinado número real?
Considerar todas las posibilidades.

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$ (*)

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2 \ln(x + 1))$ (*)

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$ (*)

Ejercicio 5. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m , cuando se mueve a velocidad v su masa cambia según la expresión $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$, donde c es la velocidad de la luz y m_0 es la masa inicial. ¿Qué sucede cuando $v \rightarrow c$?

Ejercicio 6. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar

el número de peces maduros (llamados ‘reclutas’) que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \frac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Mostrar que, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

Ejercicio 7. (*) El objetivo de este ejercicio es explicar modelos sencillos para el crecimiento de una población. Sea $N(t)$ la cantidad de miembros de una especie fija en el tiempo t . Tenemos la ecuación de la conservación de la especie dada por:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx \#nacimientos(t) - \#muertes(t) + \#migraciones(t), \quad (1)$$

donde $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ es la variación de la cantidad de la población, $\#nacimientos(t)$ es la cantidad de nacimientos de la especie en el tiempo t , $\#muertes(t)$ es la cantidad de muertes de la especie en el tiempo t , y $\#migraciones(t)$ es la cantidad de migraciones de la especie en el tiempo t .

- (a) (Modelo de Malthus, 1798) Supongamos que no hay migraciones de la especie a estudiar, y que el nacimiento y la muerte son proporcionales a $N(t)$. Es posible deducir de la ecuación (1) que la función $N(t)$ debe ser

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t},$$

donde b, d son dos constantes positivas, y $N_0 = N(0)$ es la población inicial de la especie. Calcular el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Extraer conclusiones. ¿Este modelo puede ser posible?

- (b) (Modelo de Verhust, 1838, 1845) Una hipótesis razonable para estudiar un modelo poblacional es la de suponer que hay algún tipo de auto-limitación propia del ambiente en el que crece la especie. Un modelo sencillo es el propuesto por Verhust, poniendo:

$$\#nacimientos(t) - \#muertes(t) + \#migraciones(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

donde r, K son constantes positivas, K mide la capacidad de carga del ambiente en el que está la especie a estudiar, y r es una medida de qué tan rápido se alcanza el límite K . Es posible deducir de este modelo, reemplazando en la ecuación (1) que la función $N(t)$ debe ser

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)},$$

donde $N_0 = N(0)$ es la población inicial de la especie. Calcular el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$.
Extraer conclusiones.

(c) (*) Comparar los modelos de Malthus y Verhust.

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad (*)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(h(x)) \quad , \text{ con } h(x) \text{ cualquier función}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \quad (*)$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot e^{\cos \frac{1}{x}} \quad (*)$$

Ejercicio 9. Sabiendo que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \quad (*)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)} \quad (*)$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad (*)$$

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad (*)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} \quad (*)$$

Ejercicio 10.

(a) Comprobar gráficamente que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(b) ¿Qué puede decir de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n}$ y de $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n}$ para n par?

(c) La misma pregunta para n impar.

Ejercicio 11. Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$

(a) Determinar el dominio de f .

(b) ¿Se puede calcular directamente $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? ¿Por qué?

(c) Determinar la función g definida por $g(x) = f(1+x)$.

(d) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$. Deducir $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

(e) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

Ejercicio 12. Hallar todos los pares de números reales a y b que verifican simultáneamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 2.$$

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Decidir si existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y representar gráficamente.

(a) $f(x) = |3x - 6|$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Ejercicio 14. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5)^{\frac{1}{1-x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^{\frac{\tan x}{3x}} \quad (*)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{2x - 5} \right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 1}{x} \right)^{x+1} \quad (*)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (*)$

Ejercicio 15. Sabiendo que $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$ calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2}{x + 3} \right)^x$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x, a \in \mathbb{R}$ fijo.

(f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a + h) - \ln a}{h}, a > 0$ fijo. $(*)$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}$

(g) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

(h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h}, a \in \mathbb{R}$ fijo. $(*)$

Ejercicio 16. $(*)$ Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(\frac{x}{2})}{\pi - x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 x}{x + \sin 2x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - x}$

Ejercicio 17. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2})^t$ no depende de la elección de b .

Ejercicio 18. Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

(a) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ en $x = 0$

(e) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en $x = 2$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

(c) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $x = 0$

(g) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ en $x = 2$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(h) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicio 19. ¿Cómo debe elegirse la constante A en la definición de la siguiente función, si queremos que la función f resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 20. Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en \mathbb{R}) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas:

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x(x^2-4)}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ (*)

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(f) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ (*)

(c) $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 2}$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ (*)

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos hallar todos los pares de números reales a y b para los que la función f resulta continua en todo \mathbb{R} :

$$(a) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax + b & \text{si } x \in (0, 2) \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \quad (*) \\ \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Ejercicio 22. Para cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en \mathbb{R} . Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (c) f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \quad (*) \\ \frac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 23. Analizar la continuidad en $x_0 = 5$ de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{45 \operatorname{sen}(x-5) \ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de f en $\mathbb{R} - \{5\}$?

Ejercicio 24. Mostrar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + 1$ toma el valor cero en el intervalo $(-1; 0)$.

Ejercicio 25. Mostrar que los gráficos de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x_0 \geq 0$.

Ejercicio 26. Mostrar que existe un $x_0 \in (1, e)$ tal que $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 27. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x) = \frac{|x|}{4 - x^2}$ en los intervalos $[-4; -3]$, $[-3; 3]$ y $[-1; 1]$.

Ejercicio 28. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra \$1,10 por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra \$1 por kg si se compra 8 kg o más.

- (a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.
- (b) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.
- (c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre 7,5 kg de este producto.

Ejercicio 29. (*) La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a \$1,20 por kg los primeros 5 kg, y para compras mayores a 5 kg cobra \$6 más \$ 0,90 por cada kilo que sobrepase los \$5.

- (a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.
- (b) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.