Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°3.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

1. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ haciendo $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ sii $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.

   (a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.

   (b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por
   $$\varphi(z) = \Big(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1+|z|^2}\Big).$$

   (c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

2. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si z, $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z, z') = d\big(\varphi(z), \varphi(z')\big)$ donde d es la distancia euclídea.

   (a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que, restringida a $\mathbb{C}$, $\overline{d}$ resulta equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d_{usual})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

   (b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z, w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

   (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

3. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el un único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

4. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

5. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

6. (a) Hallar homografías que transformen

      i. los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

      ii. los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

(b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$.

7. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

8. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.

   (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

   (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

   (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

   (d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

9. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si se puede escribir con coeficientes reales.

10. **Definición**: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

   (a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

   (b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

11. **Definición**: Sea C una recta o circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

   (a) Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.

   (b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de* C. Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

   es la simetría respecto de C.

   (c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

12. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

13. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.

14. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

15. Hallar homografías que transformen

    (a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

    (b) el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$).

Función logaritmo y raíces n-ésimas

16. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

    (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω. Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.

    (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $S^1 \not\subseteq \Omega$.

17. Sean $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

    (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

    (b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

    (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \to \mathbb{C},\ h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.

    (d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

18. Sea log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-t}{i+t}\right).$$

19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n-ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Definirlas.

    (b) Probar que toda rama de $\sqrt{z}$ es holomorfa.

    (c) Si Ω es conexo y f es una rama de $\sqrt{z}$ en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

    (a) Demostrar que para toda rama g, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω.

    (b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3} g(z)$ para todo z en Ω.

    (c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el item (b).