

ANÁLISIS COMPLEJO

Práctica N°9. Productos infinitos

1. Probar que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, probar que

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

3. (a) Probar que si $|z| < \frac{1}{2}$ entonces:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1 + z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

(b) Probar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge absolutamente. Mostrar que el enunciado es falso si no se pide convergencia absoluta.

4. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$$

converge normalmente en $B(0, 1)$ (y por lo tanto define una función holomorfa en $B(0, 1)$).

5. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$$

define una función holomorfa en $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

6. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

7. Probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

define una función entera.

8. *Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.*

(a) Sean $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$. Probar que

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1}{1 - r}.$$

(b) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $0 < |a_n| < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Probar que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}$$

define una función holomorfa en $B(0, 1)$ y que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0, 1)$.
¿Cuales son los ceros de f ?

9. Demostrar que existe una función $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B(0, 1)$ propiamente. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

10. Sea $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \cotg(\pi z)$, demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

11. (a) Probar que si $\operatorname{Re}(s) > 1$, la *función zeta de Riemann* definida por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ está bien definida.

(b) Probar que si $\operatorname{Re}(s) > 1$ entonces $\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n \text{ impar}} n^{-s}$.

(c) Demostrar que existen infinitos números primos.

(d) Demostrar que $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})$ donde $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos.

12. *Función Gamma.*

(a) Sea z un número real positivo. Sabiendo que para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < t < n$ vale que

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1} t^2}{2n},$$

probar que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{z-1} dt.$$

(b) Integrando por partes n veces, probar que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+z}.$$

(c) Sea γ la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

Probar que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z} \right) e^{\frac{z}{k}}$$

y deducir que el mismo resultado vale para todo $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

(d) Notar que la fórmula del ítem anterior extiende la definición de Γ al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

Automorfismos

13. (a) Sea f un automorfismo de $B(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ para todo z en $B(0, 1)$.
- (b) Probar que $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0, 1)$ tales que para todo z en $B(0, 1)$,

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1}.$$

14. (a) Sea \mathbb{P} el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir, $\mathbb{P} = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$. Probar que $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo z en \mathbb{P} ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

15. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{L} = \{\operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
16. Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$. (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 7.)
17. Caracterizar todos los automorfismos de \mathbb{C}^* . (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)