Análisis Complejo

Práctica N°4. Series

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

   (a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$, (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$, (e) $a_n = \operatorname{sen}(\frac{1}{n^2})$.

   (b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$, (d) $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

2. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,

   (a) converge si $q > 0$ y $p > 1$, (c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$,

   (b) converge si $q > 1$ y $p = 1$, (d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

4. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$, $(Z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(a_n Z_n)_{n\geq 0}$ converge. Demostrar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) Z_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Z_n - Z_{n-1}) \text{ converge.}$$

6. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números complejos.

   (a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\sum_{n=1}^{k} z_n\right| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

7. **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n \; z^n$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

9. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}\right)^n$, $|\alpha| < 1$.

10. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

11. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

12. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

    (a) $e^z \operatorname{sen} z$,

    (b) $\operatorname{sen} z \cos z$,

    (c) $\frac{e^z - 1}{z}$,

    (d) $\frac{e^z - \cos z}{z}$,

    (e) $\frac{1}{\cos z}$,

    (f) $\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

13. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la funcion $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

14. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

    - f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
    - f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

15. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

    (a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.

    (b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.

    (c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.