ÁLGEBRA LINEAL (MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA)

Práctica 6 - Normas y Condicionamiento de una matriz

Año 2015

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar la solución exacta de $A\,x = b$

(b) Si se triangula el sistema restando a la segunda ecuación $\frac{1}{10^{-4}} = 10^4$ veces la primera, queda:

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y & = & 1 \\ -9999\,y & = & -9998 \end{cases}$$

Si se redondea el valor de $y = \frac{9998}{9999}$ despejado de la segunda ecuación por $\tilde{y} = 1$, despejar el valor correspondiente $\tilde{x}$ de la primera ecuación. Comparar los valores de $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ así obtenidos con la solución exacta del sistema.

(c) Si se invierten las filas antes de triangular, y luego se triangula restando a la segunda ecuación $\frac{1}{10^4} = 10^{-4}$ veces la primera queda:

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ 0,9999\,y & = & 0,9998 \end{cases}$$

Si se redondea el valor de $y = \frac{0,9998}{0,9999} = \frac{9998}{9999}$ por $\tilde{\tilde{y}} = 1$ despejar el valor de $\tilde{\tilde{x}}$ para que se satisfaga la primera ecuación. Comparar los valores de $\tilde{\tilde{x}}$ e $\tilde{\tilde{y}}$ así obtenidos con la solución exacta del sistema.

Nota: Este ejercicio pretende ejemplificar lo siguiente: el sistema triangulado como en (c) es más estable por redondeos o pequeños errores que lo obtenido en (b). En general, dividir por números pequeños para triangular (el 10^{-4} en el primer caso) introduce inestabilidad de la solución.

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,000001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,000001 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar las soluciones exactas x_b y x_c de $A\,x = b$ y $A\,x = c$.

(b) Comparar la norma $\|x_b - x_c\|$ de la diferencia entre las dos soluciones obtenidas con la norma $\|b - c\|$ de la diferencia entre los vectores b y c.

(c) Idem para

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nota: En los dos casos, se tiene que $\|x_b - x_c\|$ es grande comparado con $\|b - c\|$. Sin embargo lo que importa en realidad es comparar las cantitades relativas $\frac{\|x_b - x_c\|}{\|x_b\|}$ y $\frac{\|b-c\|}{\|b\|}$. Calcular esas cantidades en los dos casos. El primer ejemplo es un ejemplo de un sistema mal condicionado, pues pequeños errores relativos en los datos pueden producir grandes errores relativos en las soluciones, mientras que el segundo es bien condicionado.

3. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0,89\,x + 0,53\,y & = & 0,36 \\ 0,47\,x + 0,28\,y & = & 0,19 \end{cases}$$

que tiene la solución $(1, -1)$.

(a) Determinar Δb tal que si se sustituye el lado derecho b por $b + \Delta b$, la solución sea $(0,47; -0,11)$

(b) ¿Este sistema está bien o mal condicionado?

4. Sea $D_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz diagonal que tiene el valor 0.1 en cada lugar de la diagonal. Calcular $\det(D_n)$ y $\text{cond}(D_n)$. Notar que para n grande, $\det(D_n)$ es prácticamente cero, ¿Significa esto que la matriz es mal condicionada?

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n^2} & 2 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   Determinar $\text{cond}(A_n)$ y notar que cuando n crece la matriz está cada vez peor condicionada. (*Rta:* $\text{cond}(A_n) = 5n^2+1$.)

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1}, $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ y $\text{cond}(A)$.

7. Sean:
$$A = \begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix} \;,\; b = \begin{pmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{pmatrix} \;,\; c = \begin{pmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{pmatrix}.$$
   Hallar las soluciones de $Ax = b$ y $Ax = c$. Comparar. ¿Qué pasa? Calcular $\text{cond}(A)$.

8. (*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y sea x la solución exacta al sistema $Ax = b$ y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama "vector residual" a $r := b - A\tilde{x}$. Si $e = x - \tilde{x}$ se tiene $Ae = r$. Mostrar que:
$$\frac{1}{\text{cond}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$
   Concluir que para una matriz mal condicionada los métodos numéricos no aseguran buena aproximación.

9. (*) Sean las siguientes matrices simétricas $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) En cada caso calcular los vectores b y Δb para los cuales los errores relativos $\|\Delta x\|/\|x\|$ entre la solución x del sistema exacto $Ax = b$ y la solución $x+\Delta x$ del sistema aproximado $A(x+\Delta x) = b+\Delta b$ sean los máximos posibles (y calcular ese error).
   (b) Calcular $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ y $\text{cond}(A)$ en cada caso.

10. (*) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \;\|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:
$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \inf\left\{\frac{\|A-B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$
    Nota: En realidad vale la igualdad, pero la otra desigualdad es más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\text{cond}(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

---

11. Encontrar una descomposición en valores singulares de las matrices siguientes y calcular sus normas. En cada caso verificar que el rango de la matriz es la cantidad de valores singulares no nulos.
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \;,\; D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
    Verificar que $\|C\| = |\lambda|$ donde λ es el autovalor más grande de C y calcular $\text{cond}(C)$.