ÁLGEBRA LINEAL (MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA)

Práctica 5 - Autovalores y Valores singulares

Año 2015

1. Encontrar los autovalores y los autoespacios correspondientes para cada una de las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificar, para cada una de las matrices anteriores, que la suma de los autovalores es la traza de A (es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A), y que el producto de los autovalores es el $\det(A)$.

2. Para cada una de las matrices del ej. 1, determinar si A es o no diagonalizable. En el caso que A es diagonalizable verificar que, si U es la matriz cuyas columnas forman una base de autovectores, entonces $AU = UD$ donde D es una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal.

3. Probar que: $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible.

4. Si A tiene autovalor λ, demostrar que:

(a) λ es autovalor de A^t

(b) la matriz kA tiene autovalor $k\lambda$

(c) la matriz A^r tiene autovalor λ^r, $r \in \mathbb{N}$

(d) si A es inversible, $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}

(e) $A + kI$ tiene autovalor $\lambda + k$

(f) $\lambda^2 + \lambda$ es autovalor de $A^2 + A$.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \leq i, j \leq 3$).

6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas U y $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles tales que $D = U^{-1}AU$ y $D' = V^{-1}AV$ sean diagonales. ¿Vale $D = D'$?

7. Dar un ejemplo para mostrar que los autovalores pueden alterarse cuando se sustrae de una fila un múltiplo de otra.

8. i) Diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz de probabilidad (es decir, sus coeficientes están en el intervalo $[0, 1]$ y la suma de los coeficientes de cada columna da 1) y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son sus autovalores, probar que $\lambda_1 = 1$ y $|\lambda_2| \leq 1$.

9. (*Proceso de Markov*) Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos.

- Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes. Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que
$$A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix}.$$
- Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o al término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$ (o sea de ningún enfermo y 10000 sanos), ¿Cuál es el número de enfermos al cabo del 6 meses?, ¿Cuál es el número de muertos al cabo del 1 año?.
- Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), el k-ésimo estado (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (i.e, a un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$) es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que en el modelo propuesto los individuos se enferman o se mueren pero ni se curan ni hay nacimientos).

---

10. Hallar los valores singulares de cada una de las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificar que el rango de A es igual a la cantidad de valores singulares no nulos.

11. Calcular la pseudoinversa de A para las primeras 3 matrices del ejercicio anterior.

12. Verificar que las pseudoinversas A^+ obtenidas en el ejercicio previo satisfacen las siguientes propiedades:

i) $AA^+A = A$

ii) $A^+AA^+ = A^+$

iii) $(AA^+)^t = AA^+$

iv) $(A^+A)^t = A^+A$

(De hecho, A^+ es la única que satisface las 4 propiedades).

13. Encontrar la solución mínima de $Ax = b$ (i.e, la solución x tal que $\|x\|$ y $\|Ax - b\|$ sean mínimos) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$