

ÁLGEBRA LINEAL (MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA)

Práctica 2 - Subespacios y Transformaciones lineales

Año 2015

- (1) (a) Probar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
(b) Probar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0; -x + y - z = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .
(c) Probar que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$ No es un subespacio de \mathbb{R}^2 .
(d) Mostrar que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se tiene que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax^t = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- (2) (a) Probar que los siguientes son subespacios de \mathbb{R}^3 :
• $S_1 = \{\lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$
• $S_2 = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu, 3\lambda + 2\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
• $S_3 = \{\lambda(1, 1, 3) + \mu(1, -1, 2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
(b) Probar que $S_1 = \{\lambda(-1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$, y que $S_2 = S_3 = \{\lambda(2, 0, 5) + \mu(1, -1, 2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- (3) Describir geoméricamente los subespacios S y decidir en cada caso si el vector $w \in S$.
(a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$, $w = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$
(b) $S = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$, $w = (-5, -10, -15)$
- (4) Hallar tres vectores de \mathbb{R}^3 que sean linealmente dependientes y tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
- (5) Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son bases de \mathbb{R}^3
(a) $\{(1, 0, 1), (1, 2, 0)\}$
(b) $\{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 1)\}$
(c) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
(d) $\{(\pi, 0, 0), (0, \sqrt{2}, 0), (0, 0, \sqrt[3]{3})\}$
(e) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$
- (6) Sean en \mathbb{R}^2 las siguientes bases:
$$\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

(a) Hallar las coordenadas en la base canónica \mathcal{E} del vector que en la base \mathcal{B} tiene coordenadas $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$).
(b) Hallar las coordenadas con respecto a las bases \mathcal{E} y \mathcal{B} de los vectores $(1, 2)$ y (x_1, x_2) , $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- (7) Hallar bases y dimensión de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 :
(a) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$
(b) $T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$
(c) $S \cap T$
(d) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$
(e) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$.
- (8) Consideremos las siguientes bases de \mathbb{R}^3
$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

Calcular la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$.
- (9) Consideremos las siguientes bases de \mathbb{R}^2

$$\mathcal{B}_1 = \{(3, 5), (1, 2)\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (0, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_3 = \{(-2, 1), (7, -4)\}.$$

Hallar $C = C_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3} C_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$ y verificar que $C = C_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}$.

(10) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, -8x_1 + 4x_2)$.

(a) ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\text{Nu}(f)$?

$$(5, 10), \quad (3, 2), \quad (1, 1), \quad (0, 0)$$

(b) ¿Cuáles de los siguientes vectores están en $\text{Im}(f)$?

$$(1, -4), \quad (-3, 12), \quad (5, 0), \quad (0, 0)$$

(c) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Im}(f)$.

(d) Mostrar 4 vectores que pertenezcan a $\text{Nu}(f)$.

(11) Calcular $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$ de las siguientes transformaciones lineales

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2)$ para $r = 1, -1, 2$ y $\frac{1}{3}$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(x_1 + x_2))$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$

Interprete geométicamente cada una de las transformaciones lineales anteriores.

(12) Calcular bases de $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$ para las f definidas respectivamente por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Decidir en cada caso si f es mono, epi y/o isomorfismo.

(13) Calcular la dimensión del subespacio de soluciones de los sistemas $Ax^t = 0$ para las siguientes matrices A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(14) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $B = A^{-1}$.

Definamos la t.l. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ donde $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Probar que f y g son inversas una de la otra.

(15) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (-y + z, y, z)$.

(a) Hallar $\{v_1, v_2\}$ base de $\text{Im}(f)$ y $\{v_3\}$ base de $\text{Nu}(f)$.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}^3 y hallar $M = [f]_{\mathcal{B}}$.

(16) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 2); (2, 3)\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar bases de $\text{Nu}(f)$ y de $\text{Im}(f)$.

(b) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $(f(x))^t = Ax^t, \forall x \in \mathbb{R}^2$.