ALGEBRA LINEAL - Práctica N°5 - Segundo Cuatrimestre de 2015

Determinante

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. Calcular el determinante de las matrices elementales definidas en el Ejercicio 19 de la Práctica 1.

3. i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

   ii) Calcular el determinante de $A \in K^{n\times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A).\det(B)$.

   ii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i, $1 \le i \le n$, sea $A_i \in K^{r_i\times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

   Calcular $\det(M)$.

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$

6. Probar que el determinante de la matriz $A \in K^{n\times n}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$.

Decimos que A es la *MATRIZ COMPAÑERA* del polinomio $P(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$.

7. Calcular inductivamente el determinante de la matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Dada la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que $\det\big(V(k_1, k_2, \dots, k_n)\big) = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (k_j - k_i)$.

Sugerencia: Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Si se considera el determinante de $V(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, X)$ como polinomio en X, probar que $k_1, \dots, k_{n-1}$ son sus raíces y factorizarlo.

9. Calcular los siguientes determinantes:

i) $\begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$

10. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.

11. i) Sean $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ $(1 \le i \le n-1)$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1\,1} & v_{n-1\,2} & \dots & v_{n-1\,n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

ii) Probar que si $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es linealmente independiente, $< v_1, \dots, v_{n-1} >^\circ = < \varphi >$ (es decir, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, \dots, v_{n-1} >$).

12. Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

13. Dadas las matrices A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$, una matriz tal que $\det(A + B) = \det(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

15. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$. Probar que existe $x \in K^n$ $(x \neq 0)$ tal que $A.x = \lambda.x$ si y sólo si, $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.

16. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen} \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

17. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det\big(\operatorname{adj} A\big)$. ¿Qué pasa si A no es inversible?

18. i) Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{Q}$ empleando la regla de Cramer:

$$\text{a)} \begin{cases} 3.x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7.x_2 = 4 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 = 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 = 2 \end{cases}$$

ii) Resolver el siguiente sistema lineal sobre $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z & = & 1 \\ x + z & = & 6 \\ 2x + 2y + z & = & 3 \end{cases}$$

19. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(A) = 1$ ó $\det(A) = -1$. Probar que para todo $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, existe un único $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A.x = b$.

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcular $\det(A)$.

21. i) Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / A.x = 0\}$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$ no inversible tal que $\operatorname{adj}(A) \neq 0$. Calcular $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(\operatorname{adj}(A))$.

22. i) Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{6\times 6}$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes productos en $\det(A)$?

a) $a_{23}.a_{31}.a_{42}.a_{56}.a_{14}.a_{65}$

b) $a_{32}.a_{43}.a_{14}.a_{51}.a_{66}.a_{25}$

ii) Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{5\times 5}$. Elegir todos los posibles valores de j y de k tales que el producto $a_{1j}.a_{32}.a_{4k}.a_{25}.a_{53}$ aparezca en $\det(A)$ con signo $+$.

iii) Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{4\times 4}$. Escribir todos los términos de $\det(A)$ que tengan al factor a_{23} y signo $+$.

iv) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y de X^3 en

$$\det \begin{pmatrix} 2.X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

v) Sin calcular el determinante, calcular el coeficiente de a^6 y el de b^6 en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Sean A, B, C, $D \in K^{n\times n}$. Sea $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si $A \in GL(n, K)$, $\det(M) = \det(A.D - A.C.A^{-1}.B)$. Si además $A.C = C.A$ entonces $\det(M) = \det(A.D - C.B)$.

24. *Criterio de Minkowski.* Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que sus coordenadas diagonales son positivas, las demás negativas, y las sumas por filas son positivas. Probar que $\det A \neq 0$.

25. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Una forma bilineal ω sobre V se dice *no degenerada* si cumple que
$$\omega(v, w) = 0 \;\forall\, w \in V \iff v = 0.$$
Probar que son equivalentes
   (i) $\Omega : V \to V^*$ definida por $\Omega(v)(w) := \omega(v, w)$ es un isomorfismo.
   (ii) ω es no degenerada.
   (iii) $\det(|\omega|_B) \neq 0$ para toda base B de V.
   (iv) $\det(|\omega|_B) \neq 0$ para alguna base B de V.

26. Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica. Probar que $I + M$ es inversible.
Calcular $\det((I - M)(I + M)^{-1})$.

∗ 27. Sea $k \geq 1$ un entero y $\mathbb{S}_k := \{\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}, \text{ biyectiva}\}$ el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subseteq \mathbb{C}$. Para cada $\sigma \in \mathbb{S}_k$ y $\omega \in \mathrm{Mult}^k(V, K)$ se define $\omega^\sigma \in \mathrm{Mult}^k(V, K)$ como $\omega^\sigma(v_1, \ldots, v_k) := \omega(v_{\sigma(1)} \ldots, v_{\sigma(k)})$.
Se definen $\Psi_S, \Psi_A : \mathrm{Mult}^k(V, K) \to \mathrm{Mult}^k(V, K)$ como
$$\Psi_S(\omega) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} \omega^\sigma \qquad \text{y} \qquad \Psi_A(\omega) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega^\sigma.$$
Probar que son proyectores sobre $\mathrm{Sym}^k(V, K)$ y $\mathrm{Alt}^k(V, K)$ respectivamente.

∗ 28. Sea $\zeta_n \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de 1. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices inversibles tales que
$$AB = \zeta_n BA.$$
Probar que los únicos subespacios simultáneamente invariantes por A y B son 0 y $\mathbb{C}^n$.

∗ 29.
   a) ¿Cuántas matrices de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n\times n}$ tienen determinante no nulo?
   b) Sea $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \{M \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n\times n} : \det(M) = 1\}$. Calcular su cardinal.
   c) *Coeficiente Binomial Gaussiano.* Sea V un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espacio vectorial de dimensión n y $k \leq n$ un entero. Hallar la cantidad de subespacios de V de dimensión k.

∗ 30. *Resultante de dos polinomios.* Sea K un cuerpo y $f, g \in K[X]$ de grados $m \geq 1$ y $n \geq 1$ respectivamente. Se define la transformación lineal $S_{f,g} : K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X] \to K_{n+m-1}[X]$ por
$$S_{f,g}(a(X), b(X)) := a(X)f(X) + b(X)g(X).$$
Sea $E = \{1, X, \ldots, X^{m+n-1}\}$ la base canónica de $K_{n+m-1}[X]$ y
$$B = \{(1, 0), (X, 0), \ldots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), (0, X), \ldots, (0, X^{m-1})\}$$
una base de $K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X]$.
   - Probar que $S_{f,g}$ es un isomorfismo si y sólo si f y g son coprimos.
   - Probar que f y g son coprimos si y sólo si
   $$\mathrm{Res}(f, g) := \det |S_{f,g}|_{BE}$$
   es no nulo.