ALGEBRA LINEAL - Práctica N°4 - Segundo Cuatrimestre de 2015

Espacio Dual

1. Dada la base B del K-espacio vectorial V, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^2,\ B = \{(1,-1),(2,0)\}$.
   b) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
   c) $V = \mathbb{R}_3[X],\ B = \{-X+2,\ X-1,\ X^2-3X+2,\ X^3-3X^2+2X\}$.

2. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* /\ \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Hallar una base de S.

3. Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2, \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3, \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3.$$

   Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

4. Sean f_1 , f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

   a) Probar que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
   b) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$.

5. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

   a) Sean $\varphi_1,\ \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Demostrar que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) = \mathrm{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.
   b) Sean φ_i $(1 \leq i \leq r)$ formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$ tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(x) = 0.$$

   Probar que $\varphi \in <\varphi_1, \ldots, \varphi_r>$.
   c) Sean φ_i $(1 \leq i \leq n)$ formas lineales en V^*. Probar que

$$\{\,\varphi_1, \ldots, \varphi_n\,\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) = 0$$

6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

   a) Calcular las coordenadas de φ en E^*.
   b) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B. (Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

8. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},$$

$$B_1 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}.$$

Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

9. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f \qquad \forall \, \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f.

a) Probar que f^t es una tranformación lineal.
b) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$.
c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$.
Si $B = \{(1,2),(1,3)\}$ y $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^* B^*}$.
d) Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^* B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$

10. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = < (1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0) >$.
b) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = < (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) >$.
c) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_3 = 0; \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
d) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

11. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \, A \cdot B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

12. Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = <(1,1,-1,1),(2,-1,3,1)>$, $T = <(2,-4,8,0),(-1,1,2,3)>$.

b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \Big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,:\, x_1 - x_3 = 0; \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0\Big\}$, $T = <(2,1,3,1)>$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \Big\{(x_1,x_2,x_3)\,:\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \quad 3x_2 - 2x_3 = 0\Big\}$,
$T = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1 - x_2 = 0\}$.

13. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

14. Sea V un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espacio vectorial de dimensión n. Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} \,/\, \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} \,/\, \dim(S) = n-1\}$$

y calcular explícitamente dicho número.

15. Sea $\mathrm{tr} : \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}} \to \mathrm{K}$ la forma lineal TRAZA y dado $A \in K^{n\times n}$ se define $f_A : K^{n\times n} \to K$ como $f_A(X) = \mathrm{tr}(\mathrm{AX})$.

a) Probar que $f_A \in (K^{n\times n})^* \;\forall\, A \in K^{n\times n}$.

b) Probar que $f_A(X) = 0 \;\forall\, X \in K^{n\times n} \;\Rightarrow\; A = 0$.

c) Probar que $\gamma : K^{n\times n} \to (K^{n\times n})^*$ definida como $\gamma(A) := f_A$ es un isomorfismo.

d) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\gamma(A) = f$.

16. Sea $\varphi \in (K^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(A\cdot B) = \varphi(B\cdot A) \;\forall\, A,\, B \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, \alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha \mathrm{tr}$. Deducir que si $\varphi(A\cdot B) = \varphi(B\cdot A) \;\forall\, A,\, B \in K^{n\times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = \mathrm{tr}$.

17. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ distintos. Para cada $\forall\, i = 0, \dots, n$, se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \to K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) := P(\alpha_i)$.

a) Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$.

b) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i . P_i$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ ($\forall\, i = 0, \dots, n$). Este polinomio se llama el *Polinomio Interpolador de Lagrange.*

c) Probar que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

18. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $f,\, g \in V^*$ tales que $f.\, g \in V^*$. Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.

19. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0$, $\forall\ i = 0, \dots, n$.

Álgebra Multilineal

20. Sea K un cuerpo donde $2 \neq 0$ y V un K-espacio vectorial. Probar que
$$\mathrm{Bil}(V, K) = \mathrm{Alt}^2(V, K) \oplus \mathrm{Sym}^2(V, K)$$
donde
$$\mathrm{Alt}^2(V, K) := \{\omega \in \mathrm{Bil}(V, K) :\ \omega(v, v) = 0\ \forall v \in V\}$$
y
$$\mathrm{Sym}^2(V, K) := \{\omega \in \mathrm{Bil}(V, K) :\ \omega(v, w) = \omega(w, v)\ \forall v, w \in V\}.$$

21. Sea K tal que $2 = 0$ (por ejemplo $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Exhibir una forma antisimétrica que no sea alternada. ¿Es simétrica?

22. Sea V un espacio vectorial sobre K y $n, k \geq 1$ enteros. Probar que

    a) $\mathrm{Alt}^k(V, K^n) \simeq \mathrm{Alt}^k(V, K)^n$,

    b) $\dim(\mathrm{Alt}^k(V, K^n)) = n. \dim(\mathrm{Alt}^k(V, K))$.

23. Sean V, W espacios vectoriales sobre K. Probar que

    a) $\Psi : \mathrm{Bil}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V, W))$, $\Psi(\omega)(v_1)(v_2) := \omega(v_1, v_2)$ es un isomorfismo,

    b) $\mathrm{Mult}^n(V, W) \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Mult}^{n-1}(V, W))$,

    c) $\dim(\mathrm{Mult}^n(V, W)) = \dim(V)^n \dim(W)$.

$*$ 24. Sea $V = < v > \oplus W$ un K-espacio vectorial de dimensión n, $v \neq 0$, y $k \geq 1$ un entero.

    a) Sean $\Psi_1 : \mathrm{Alt}^{k+1}(V, K) \to \mathrm{Alt}^k(W, K)$ y $\Psi_2 : \mathrm{Alt}^{k+1}(V, K) \to \mathrm{Alt}^{k+1}(W, K)$ dadas por
    $$\Psi_1(\omega)(w_1, \dots, w_k) := \omega(v, w_1, \dots, w_k)$$
    y
    $$\Psi_2(\omega)(w_1, \dots, w_{k+1}) := \omega(w_1, \dots, w_{k+1})$$
    respectivamente. Probar que definen un isomorfismo
    $$\mathrm{Alt}^{k+1}(V, K) \simeq \mathrm{Alt}^k(W, K) \times \mathrm{Alt}^{k+1}(W, K).$$

    b) Calcular $\dim(\mathrm{Alt}^k(V, K))$.

$*$ 25. Sea $k \geq 1$ un entero y $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define
$$f^t : \mathrm{Alt}^k(W, K) \to \mathrm{Alt}^k(V, K)$$
como $f^t(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$.

    a) Hallar bases de $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

    b) Hallar la matriz de $f^t : \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en dichas bases para
    $$f(x, y) = (2x + y, x - y, -x - y).$$

    c) Hallar la matriz de $g^t : \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ para
    $$g(x, y, z) = (2x + y - z, x - y - z).$$