Álgebra III - Segundo parcial

6 de diciembre de 2011

1	2	3	4	Calificación

Nombre:

____

LU:

____

1. Sean $K \subseteq E \subseteq F$ cuerpos tales que la extensión E/K es puramente inseparable.

(a) Probar que si $\alpha \in F$ es separable sobre K, entonces $m_{\alpha,E} = m_{\alpha,K}$.

(b) Sea F_s la clausura separable de F/K. Probar que si $[F : K] < \infty$ y F/E es separable, entonces $F = E.F_s$ y $[F : E] = [F_s : K]$.

2. Sea K un cuerpo de q elementos y $n \in \mathbb{N}$ coprimo con su característica. Sea $\xi_n \in \overline{K}$ una raíz n-ésima primitiva de 1.

(a) Probar que: $\xi_n + \xi_n^{-1} \in K \iff q \equiv \pm 1(n)$.

(b) Sea $\xi_7 \in \overline{\mathbb{F}_2}$ una raíz séptima primitiva de 1. Calcular el polinomio minimal de $\xi_7 + \xi_7^{-1}$ sobre $\mathbb{F}_2$.

3. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de grado n tal que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{a})$ para $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sea $E/\mathbb{Q}$ una subextensión de grado d.

(a) Calcular $N_{K/E}(\sqrt[n]{a})$.

(b) Probar que $E = \mathbb{Q}(\sqrt[d]{a})$.

4. Sea $f = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ mónico e irreducible y sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ sus raíces. Sea N el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$ y sea $H = \{Id, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\} \leqslant \mathbb{S}_4$. Probar que:

(a) $Gal(N/\mathbb{Q}) \leqslant H \implies \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 \in \mathbb{Z}$.

(b) $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 \in \mathbb{Z}$ y $3 \mid [N : \mathbb{Q}] \implies 3 \mid a_2$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS