Álgebra III - Segundo recuperatorio

21 de octubre de 2011

1	2	3	4	Calificación

Nombre:

LU:

---

1. Sea $c_{28}(X) \in \mathbb{Z}[X]$ el polinomio ciclotómico de orden 28.

(a) Factorizar el polinomio $c_{28}(X^{10})$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Determinar la cantidad de factores irreducibles de $c_{28}(X^{10})$ en $\mathbb{F}_{13}[X]$.

2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 3$. Sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{F}_p$ y sea E el cuerpo de descomposición del polinomio $f(X) = X^{p^4} - u^{p(p^3-1)}X^p - uv \in \mathbb{F}_p(u,v)[X]$ sobre $K = \mathbb{F}_p(u,v)$. Calcular los grados de separabilidad e inseparabilidad de la extensión E/K.

3. Sea $f = X^5 - bX - a \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de f tal que $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha+1) = -77$ y $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha-1) = 81$. Decidir si α es resoluble por radicales en $\mathbb{Q}$.

4. (a) Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$, mónico, tal que todas sus raíces tienen valor absoluto 1. Probar que si $0 \leqslant r \leqslant n$, se tiene: $|a_r| \leqslant \binom{n}{r}$.

(b) Dado $n \in \mathbb{N}$, probar que hay finitos enteros algebraicos de grado n, tales que todos sus conjugados (incluyendo él mismo) tienen valor absoluto 1.

(c) Probar que un elemento α como en (b) es una raíz de la unidad.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS