Álgebra III - Segundo parcial

4 de diciembre de 2012

1	2	3	4	Calificación

Nombre:

____

LU:

____

1. Sean $K \subseteq E \subseteq F$ cuerpos. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Si F/E es normal y E/K es puramente inseparable, entonces F/K es normal.

(b) Si F/E es puramente inseparable y E/K es normal, entonces F/K es normal.

2. (a) Calcular le polinomios ciclotómicos Φ_{18} y Φ_{90}.

(b) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que el polinomio:

$$X^6 - (5n+1)X^3 + (5m+1)$$

es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

3. (a) Sean K un cuerpo y $f \in K[X]$ irreducible de grado n. Sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de f. Probar que para todo $c \in K$ se tiene:

$$N_{K[\alpha]/K}(\alpha - c) = (-1)^n f(c).$$

(b) Sea $p > 5$ un número primo. Sean u y v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $K = \mathbb{F}_p(u^3, v^5)$ y $E = \mathbb{F}_p(u, v)$. Calcular $Tr_{E/K}(u + 2v)$ y $N_{E/K}(u + 2v)$.

4. (a) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado 5. Probar que si $\Delta(f) < 0$, entonces f no es resoluble por radicales en $\mathbb{Q}$.

(b) Probar que el mismo enunciado vale si el polinomio tiene grado 13.

(c) Hallar un $a \in \mathbb{Q}$ tal que el polinomio $f = X^{13} + aX + 12$ no sea resoluble por radicales en $\mathbb{Q}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS