Álgebra III - Recuperatorio del segundo parcial

18 de diciembre de 2012

1	2	3	4	Calificación

Nombre:

____

LU:

____

1. Sea K un cuerpo de característica p y sean α, $\beta \in \overline{K}$, distintos de 0, tales que α es separable sobre K y β es puramente inseparable sobre K.

(a) Probar que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta) = K(\alpha\beta)$.

(b) Sea $K = \mathbb{F}_3(t)$. Sea $f = (X^3 - t^2X + t)(X^3 - t) \in K[X]$ y sea E su cuerpo de descomposición sobre K. Hallar un $\gamma \in E$ tal que $E = K(\gamma)$.

2. Sea $\theta \in \overline{\mathbb{F}_2}$ una raíz del polinomio ciclotómico ϕ_5. Sean $\alpha = \theta^2 + \theta^3$ y $\xi = \alpha\theta$.

(a) Probar que $\alpha \in \mathbb{F}_4$ y que $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\xi)$.

(b) Calcular el polinomio minimal de ξ sobre $\mathbb{F}_2$ y factorizarlo en $\mathbb{F}_4[X]$.

3. Decidir si existe algún $a \in \mathbb{C}$ de grado exactamente 3 sobre $\mathbb{Q}$ tal que $N_{\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}}(a) = 1$, $N_{\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}}(a + 1) = 1$ y $N_{\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}}(a - 1) = -7$

4. Sea $a \in \mathbb{C}$ una raíz del polinomio $X^3 + X + 1$. Decidir si el polinomio $X^3 - X + 1$ tiene alguna raíz en $\mathbb{Q}(a)$.

(Nota: Observar que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ y a es una raíz de f, el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$ es el menor cuerpo N que contiene a $\mathbb{Q}(a)$ y tal que $N/\mathbb{Q}$ es normal.)

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS