

Algebra III

Práctica 6 - Resolubilidad

2do cuatrimestre 2015

Ejercicio 1. Probar que:

1. Todo p -grupo es resoluble.
2. D_n es resoluble.
3. S_n es resoluble si y solo si $n \leq 4$.

Ejercicio 2. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son resolubles por radicales:

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, i + \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$
2. E/\mathbb{Q} cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$
3. $E/\mathbb{C}(a, b)$ cuerpo de descomposición de $f = X^2 + aX + b$
4. $E/\mathbb{C}(a, b, c)$ cuerpo de descomposición de $f = X^3 + aX^2 + bX + c$
5. $E/\mathbb{C}(a, b, c, d)$ cuerpo de descomposición de $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

Ejercicio 3. Probar que ninguno de los siguientes polinomios es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} .

1. $X^5 - 14X + 7$
2. $X^5 - 7X^2 + 7$
3. $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$

Ejercicio 4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado primo ≥ 5 . Probar que si f tiene exactamente dos raíces no reales, entonces f no es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} .

Ejercicio 5. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ irreducible de grado primo $p \geq 5$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ las raíces de f y sea $N = K[\alpha_1, \dots, \alpha_p]$ el cuerpo de descomposición de f sobre K . Probar que f es resoluble por radicales sobre K si y solo si $N = K[\alpha_i, \alpha_j]$ para todos $1 \leq i < j \leq p$.

Ejercicio 6.

1. Sea $m \in \mathbb{N}$ par y sean $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ enteros positivos pares con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1) \dots (X - a_r) - 2$. Probar que:
 - a) f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
 - b) Para m suficientemente grande, f tiene exactamente dos raíces no reales en \mathbb{C} .
 - c) (Difícil) Probar que el item anterior sigue valiendo si se quita la hipótesis “ m suficientemente grande”.
2. Deducir que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión normal E/\mathbb{Q} con grupo de Galois isomorfo a S_p .

Ejercicio 7. (Artin-Schreier) Sea K un cuerpo de característica p .

1. Sea E una extensión cíclica de K de grado p . Probar que existe $\alpha \in E$ que satisface una ecuación $X^p - X - a$ para algún $a \in K$, tal que $E = K[\alpha]$.
2. Dado $a \in K$, probar que el polinomio $X^p - X - a$ o bien tiene una raíz en K , en cuyo caso tiene todas sus raíces en K , o bien es irreducible en $K[X]$. Probar que en este último caso, si α es una raíz, entonces $K[\alpha]$ es cíclico de orden p sobre K .

Ejercicio 8. Sea K con $\text{car}(K) = p$. Una extensión separable E/K es *radical* si admite una torre de descomposición

$$K =: E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n := E$$

tal que para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que E_i/E_{i-1} es de alguno de los tipos siguiente:

1. $E_i = E_{i-1}[\alpha]$ con $\alpha^q \in E_{i-1}$ con q primo, $q \neq p$,
2. $E_i = E_{i-1}[\alpha]$ con α raíz de $X^p - X - a$ para algún $a \in E_{i-1}$.

Una extensión separable E/K es *resoluble por radicales* si está contenida en una extensión radical. Probar que E/K separable es resoluble por radicales si y solo si existe una extensión Galois N/K con $E \subset N$ tal que $\text{Gal}(N/K)$ es resoluble.