
ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica N° 4: Elementos Finitos.

Notación: Designaremos con $V = \{v : v \text{ es una función continua definida en } [0,1], \text{ con derivada } v' \text{ continua a trozos y acotada en } [0,1], \text{ y que satisface } v(0) = v(1) = 0\}$. Notaremos

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv dx.$$

Llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde f es una función dada.

(V) será el problema variacional:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } \langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Ejercicio 1 Probar que si w es continua en $[0,1]$ y $\int_0^1 wv dx = 0 \quad \forall v \in V$, entonces $w(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Ejercicio 2 Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 3 Probar que las siguientes formas bilineales son continuas y coercivas en los respectivos espacios V

- a) $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.
- b) $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.
- c) $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0, 1]$.
- d) $V = H_0^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0, 1]$.
- e) $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los ítems previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 4 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

- a) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- b) ¿Cómo definiría una solución débil?
- c) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- d) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.
- e) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\bar{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 5 Realizar un análisis como el del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

con α y $\beta \in \mathbb{R}$, y f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 6 Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 7 Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 8 Considerar una partición uniforme del intervalo $(0, 1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$. Construir el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 4, 6, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es lineal en cada } I_i\}$$

definiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 9 Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\text{hallar } u \in H_0^1(I) \text{ tal que } (u', v') = (1, v) \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u - u_h\|_{H^1(I)}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h . ¿Qué sucede cuando se usan elementos cuadráticos?

Ejercicio 10 Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0,1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construir bases adecuadas y obtener la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 11 Sea $I = (0,1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I .

- a) Definimos para cada $1 \leq i \leq N-1$, $G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$ Verificar que $G_i \in H_0^1(0,1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0,1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

- b) Dada $f \in L^2(0,1)$ considerar el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Escribir el problema en forma variacional sobre H_0^1 y dar formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\}$$

- Demostrar que ambos problemas variacionales tienen solución única.
- Demostrar que $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto). Verificar que efectivamente, en el ejercicio 10 sucede eso.

- c) Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 12 Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f .

Llevar el problema a la forma débil:

Hallar $u \in H_0^2(0,1)$ tal que

$$\langle u'', v'' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(0,1)$$

y demostrar que este problema variacional tiene solución única.

Ejercicio 13 Definir

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y probar que en general V_h no está incluido en H^2 . Pensar cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset H_0^2$. Construir las bases para W_h .

Ejercicio 14 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) = f(x) \text{ en } I = (0, 1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con $a \in C^1(\bar{I})$ y $b, f \in C(\bar{I})$.

- a) Plantear la formulación débil del problema, en un espacio adecuado V .
- b) Demostrar que para toda $u \in V$ se tiene que:

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)}$$

- c) Probar que si $a \geq \alpha > 0$ y

$$\|b\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min_{x \in [0, 1]} a(x)$$

entonces existe una única solución del problema débil.

- d) Probar que la solución débil es también solución del problema continuo.

Ejercicio 15 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \beta u' = f & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

siendo $\beta > 0$.

- a) Plantear la formulación débil de este problema, de la forma:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

para un espacio adecuado V .

- b) Probar que F y a son continuas, y que si β es suficientemente chico, a es coerciva. Concluya existencia y unicidad de solución para el problema débil.
- c) Sea $\mathcal{T}_h$ una partición unifome del intervalo $[0, 1]$, de parámetro $h > 0$ dada por $\{x_i\}$, $x_i = ih$. Sea

$$V_h = \{f \in C([0, 1]) : f|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\}.$$

Considerar el problema discretizado:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \tag{2}$$

Si $u_h \in V_h$ es la solución de (2), y u es la solución de (1), probar, utilizando el lema de Cèa, que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$