ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2015

Práctica N° 1: Diferencias Finitas: Ecuaciones Parabólicas.

Ejercicio 1 Se utiliza el esquema en diferencias:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1 - 2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, donde se supone que U tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en t , y hasta de orden seis en x . Probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1 - 2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12}(6rU_{tt} - U_{xxxx})_{j,n} + \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360}U_{xxxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con $-1 < \theta_j < 1$, $0 < \theta_n < 1$.

1. Pruebe que el error de truncado es de orden h^2 , salvo para $r = 1/6$ en que es de orden h^4 .
2. Si el valor máximo de $|T|$ es M y

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq N} \{|e_j^n|\}$$

probar que si $0 < r \leq 1/2$ entonces $E_n \leq tM$.

En particular, observe que si además $t \leq T_f$ y U_{tt} y U_{xxxx} están acotadas luego

$$E_n \leq CT_f k \tag{1}$$

para una constant C independiente de h y k .

Ejercicio 2 Escribir un programa en Matlab para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor $u_t = u_{xx} + f(x, t)$ en el intervalo $[0, 1]$ para un dato inicial arbitrario y con condiciones de borde (de tipo Dirichlet) homogéneas.

Ejercicio 3 Utilizar el programa del ejercicio previo con $f(x, t) \equiv 0$ para el caso

$$u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.05$, $k = 0.0012$, y $k = 0.0013$. Avance por lo menos 50 pasos, ¿qué sucede? Verifique el valor de $r = k/h^2$ en cada caso.

Ejercicio 4 Repetir el ejercicio anterior con $k = 0.0013$ para

$$1. \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = x(1 - x),$$

$$2. \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = \sin(\pi x).$$

Observe que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. >¿Qué ocurre con (a) para 100 pasos? >y con (b)? >Por qué cree que resulta mucho más estable este último caso? Sug.: El dato inicial coincide con un autovector de la matriz tridiagonal resultante.

Ejercicio 5 En los casos del ejercicio previo, resolver analíticamente y estudiar el comportamiento del error hasta el tiempo $T_f = 1$ utilizando el programa del ejercicio 2. Tome $r = 0.5$ y diversos pasos de discretización en t y x . Graficar $\log(E_n)$ en cada paso de tiempo, donde $E_n = \max_{0 \leq j \leq N} \{ |e_j^n| \}$, $N = 1/h$. Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota (1) obtenida el ejercicio 1 no es demasiado buena.

Ejercicio 6 Idem que el ejercicio anterior pero con

$$1. \quad u_t = u_{xx} - 2 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 0,$$

$$2. \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1.$$

¿Qué nota en 2)? ¿A que supone que se debe?

Ejercicio 7 Dado $J \in \mathbb{N}$ sea $h = \frac{1}{J}$ y considerar el producto interno $(v, w) = h \sum_{j=0}^J v_j w_j$ para $v, w \in \mathbb{R}^{J+1}$, y sea $l_{2,h}^0$ el subespacio de $\mathbb{R}^{J+1}$ dado por $l_{2,h}^0 = \{v = (v_0, v_1, \dots, v_J) \in \mathbb{R}^{J+1} : v_0 = v_J = 0\}$. Para cada $p = 1, \dots, J-1$, sea $\varphi_p \in l_{2,h}^0$ definido por

$$\varphi_{p,j} = \sqrt{2} \sin(\pi p j h), \quad j = 0 \dots, J.$$

Probar que $\{\varphi_p : p = 1, \dots, J\}$ es una base ortonormal de $l_{2,h}^0$.

Ejercicio 8 1. Usando el método de Fourier probar que el esquema en diferencias propuesto en el Ej. 1 es estable para $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$.

2. Considere el esquema en diferencias

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

¿Cuál es el error de truncado? ¿Es estable?

Ejercicio 9 Considerar la ecuación $u_t = au_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y con a positivo. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

1. Probar utilizando el método de Fourier que el método es estable para cualquier valor de r . Estudiar también la estabilidad en norma $\|\cdot\|_{\infty,h}$.

2. Probar que el error de truncado es $O(k) + O(h^2)$.

Ejercicio 10 Estudiar la estabilidad y el error de truncado para el método θ , con $0 \leq \theta \leq 1$:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{(\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1 - \theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n))\}$$

¿Qué ocurre si $\theta = 1/2$?

Ejercicio 11 Escriba un programa que permita integrar la ecuación del calor con el método θ , tomando θ para parámetro. Para el método de Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$), estudie numéricamente si la condición $r \leq 1$ es necesaria para tener principio del máximo en el esquema.

Sug.: Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno.

Ejercicio 12 Considerar la ecuación del calor $U_t = U_{xx}$, en el intervalo $[0, 1]$, con condiciones de Neumann en el borde. Hallar un método centrado en x , y explícito en t de primer orden. Analizar la estabilidad del esquema en diferencias obtenido.

Ejercicio 13 Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en $\mathbb{R}$. Demuestre que las raíces están en el círculo unitario $\Leftrightarrow |c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$. (Este resultado facilita el análisis de estabilidad por el método de Fourier para esquemas de tres capas).

Ejercicio 14 Se desea aproximar la solución de la ecuación

$$U_t = (xU)_x + U_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

con condiciones de borde: $U(0, t) = U(1, t) = 0$.

Para ello se utiliza una malla de paso Δx , $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 1$, donde $x_j = j\Delta x$, $J = \frac{1}{\Delta x}$. Se propone el esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{x_{j+1}u_{j+1}^n - x_{j-1}u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

(a) Calcule el error de truncado del esquema.

(b) Pruebe que si $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, entonces:

$$u_j^{n+1} \leq (1 + \Delta t) \max_j |u_j^n|$$

Concluya que en tal caso el método resulta estable.

(c) Pruebe que si se utiliza este esquema para resolver la ecuación en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$, el método converge.

Ejercicio 15 Para la siguiente ecuación

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

se propone la aproximación

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \alpha \Delta t u_j^n$$

para $\alpha < 0$ hallar condiciones sobre r que aseguren la estabilidad, si $\alpha > 0$ halle r de modo tal que el radio espectral de la matriz de iteraciones resultante M verifique $\rho(M) \leq (1 + \Delta t \alpha)$ en tal caso demuestre que bajo tales condiciones, si llamamos $\frac{T_{final}}{\Delta t} = N$, se tiene $\|M^N\|_2 \leq C$, C independiente de $\Delta x, \Delta t$, y entonces el esquema resulta estable.

Ejercicio 16 Se tiene el problema

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

con las condiciones de borde e iniciales:

$$u_x(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1 - x^2$$

escriba un esquema explícito en t , centrado de segundo orden en x y de condiciones suficientes sobre $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ para asegurar la estabilidad. Implemente el algoritmo numéricamente.

Ejercicio 17 Para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y dato inicial $U(x, 0) = U_0(x)$ se propone el esquema :

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r \alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1 - \alpha)L_{xx}(u_j^n)$$

donde $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

1. Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.
2. Demostrar que si $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$ se tiene principio del máximo.

Ejercicio 18 Se desea aproximar la solución de la ecuación

$$U_t = U_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

con condiciones de borde:

$$U(0, t) = U(1, t) = 0.$$

Para ello se propone el siguiente esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4}}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- (a) Calcule el error de truncado. ¿Es necesario imponer alguna condición sobre Δt y Δx para garantizar consistencia?
- (b) De condiciones sobre $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ para que el método resulte estable en norma infinito.

Ejercicio 19 Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{con } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \quad t > 0$$

Se propone el siguiente esquema de diferencias explícito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + r_x(u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n) + r_y(u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n)$$

donde $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. Hallar el error de truncado local y dar condiciones sobre r_x y r_y para garantizar la estabilidad.

Ejercicio 20 Resolver numéricamente la ecuación del calor $u_t = \Delta u$ en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ con condición de borde de tipo Dirichlet y dato inicial $u_0(x, y)$ utilizando el esquema de diferencias propuesto en el ejercicio anterior.