

ANÁLISIS NUMÉRICO

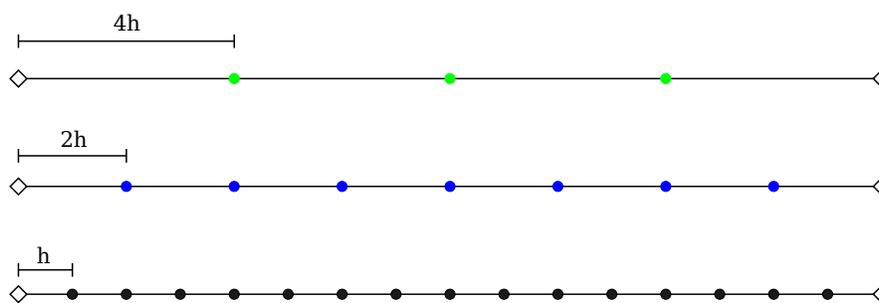
Segundo Cuatrimestre 2015

TP N° 1. Método Multigrilla

El objetivo de este trabajo es implementar un método multigrilla con K grillas, para resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \alpha u' + \beta u = f & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

En la siguiente figura mostramos la relación entre grillas para $K = 3$.



Notamos \mathcal{M}_k a la malla con paso $2^k h$: así, \mathcal{M}_1 será la malla más fina y \mathcal{M}_K la más gruesa. Análogamente, notamos P_{k+1}^k a la matriz de prolongación de \mathcal{M}_{k+1} a \mathcal{M}_k , y R_k^{k+1} a la matriz de restricción de \mathcal{M}_k a \mathcal{M}_{k+1} . A su vez, A^k es la matriz del sistema en la malla \mathcal{M}_k . Observar que valen:

$$R_k^{k+1} = \frac{1}{2}(P_{k+1}^k)^t$$

$$A^{k+1} = R_k^{k+1} A^k P_{k+1}^k$$

El método multigrilla propuesto consiste en:

1. Definir u^1 de manera aleatoria.
2. Suavizar u^1 resolviendo: $A^1 u^1 = b$.
3. Iterar sobre el índice $k = 2, \dots, K$:
 - Calcular r^k , la restricción del residuo r^{k-1} a la malla \mathcal{M}_k .
 - Suavizar r^k resolviendo: $A^k u^k = r^k$.
4. Resolver el sistema $A^K u^K = r^K$
5. Iterar sobre el índice $k = K - 1, \dots, 1$:
 - Corregir la solución en k : $u^k = u^k + P_{k+1}^k u^{k+1}$.

- Suavizar u^k resolviendo: $A^k u^k = r^k$

Tanto los suavizados como la resolución en la malla más gruesa se realizan aplicando el método de Jacobi con peso ω .

Para la implementación del método se recomienda:

- Implementar separadamente rutinas que dado el paso h de una malla computen la matriz de restricción a la malla de paso $2h$ y la matriz de prolongación a la malla de paso $\frac{h}{2}$. Puede resultar útil estudiar el comando `circshift`.
- Implementar separadamente una rutina que reciba parámetros: A , b , ω , x_0 y ν y aplique ν iteraciones del método de Jacobi con peso ω para resolver el sistema $Ax = b$, con dato inicial x_0 .
- Aplicar Jacobi con tres cantidades de iteraciones distintas: ν_1 para los suavizados de la fase de ascenso, ν_2 para la resolución y ν_3 para los suavizados de la fase de descenso.

Resolver para $\varepsilon = 0.1$, $a = b = 1$ y $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + x - 1$. Comparar los resultados con la aplicación directa del método de Jacobi al sistema en la malla más fina.