Análisis Numérico - TP 2 - **Autovalores**

Segundo Cuatrimestre de 2015

Se quiere resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u, & \Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2] \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{array} \tag{1}$$

Es decir, se desea calcular los autovalores y las correspondientes autofunciones del Laplaciano, con condiciones de Dirichlet homogéneas, en un rectángulo.

Los autovalores pueden calcularse analíticamente por separación de variables y resultan ser:

$$\lambda_{j,k} = \left(\frac{j\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{\ell_2}\right)^2.$$

Sólo nos interesará aproximar los primeros autovalores.

La formulación débil del problema es: hallar $u \in H_0^1$ tal que

$$\int \nabla u \nabla v = \lambda \int uv, \quad \forall v \in H_0^1,$$

que conduce a un problema discreto de la forma:

$$Au = \lambda Bu. \tag{2}$$

Para la formulacion discreta, definimos una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de parámetro h, y el espacio $V = \{v : \ v|\partial\Omega = 0, \, v \text{ continua y lineal en cada } T \in \mathcal{T}\}$, con la base nodal $\{\phi_i\}_i$, con $i = 1, ..., N_I$, donde N_I es el número de nodos *interiores* de la triangulación. Para tomar en cuenta las condiciones de contorno resulta conveniente plantear el problema (2) para los nodos interiores, es decir, con $A, B \in \mathbb{R}^{N_I \times N_I}$ y $u \in \mathbb{R}^{N_I}$. Una posibilidad es construir las matrices A y B completas (incluyendo los nodos de borde), y luego extraer las submatrices correspondientes a los nodos interiores.

Para resolver (2) se recomienda estudiar la documentación del comando `eigs` de Matlab. Sólo nos interesará conocer los primeros autovalores del problema, por lo que no resulta conveniente utilizar el comando `eig`.

Una vez construido el sistema (2), calcular los primeros seis autovalores y sus correspondientes autofunciones y graficarlas. Tener en cuenta que la solución u obtenida corresponde sólo a los nodos interiores, por lo que resulta necesario completarla con ceros en las posiciones correspondientes a nodos de borde.

Resolver para distintos valores de h y graficar el error cometido en la aproximación de los primeros cuatro autovalores en función de h. Puede resultar útil el comando `sort`, para ordenar los autovalores, pero también los correspondientes autovectores, de modo que se grafiquen en el orden correcto.