# ALGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Segundo Cuatrimestre de 2015

*Llamamos $V$ a un $K$-espacio vectorial donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. De ser necesario aparecerá especificado el cuerpo al que nos estamos refiriendo. Si $A \in K^{n\times n}$, notamos por $A^*$ a la matriz $\overline{A}^t$.*

## Espacios vectoriales con producto interno

1. Sea $V$ un espacio vectorial con un producto interno $\langle\, , \rangle$. Probar:

   *a*) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

   *b*) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,\langle x, y\rangle$ $(\forall c \in K)$.

   *c*) $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle\, , \forall\, x \in V \;\Rightarrow\; y = z$.

2. Sea $V$ un espacio vectorial y sea $\langle\, , \rangle$ un producto interno sobre $V$. Probar:

   *a*) Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}.\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}.\|x-y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in V.$$

   *b*) Si $V$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}.\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}.\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}.\|x+i.\,y\|^2 - \frac{i}{4}.\|x-i.\,y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in V.$$

   Las igualdades anteriores se llaman *identidades de polarización.*

3. Sea $\big(V, \langle\, , \rangle\big)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

4. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

   *a*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\;\; \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$.

   *b*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\;\; \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$.

   *c*) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\;\; \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1,\;$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

   *d*) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = 2x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 - x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1$.

   *e*) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1+i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$.

   *f*) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = x_1\overline{y}_1 - ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$.

   *g*) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\;\; \Phi(x, y) = 2x_1\overline{y}_1 + x_3\overline{y}_3 - x_1\overline{y}_3 - x_3\overline{y}_1,\;$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

5. Determinar para qué valores de $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$

   $$\Phi(x, y) = a\, x_1y_1 + b\, x_1y_2 + b\, x_2y_1 + b\, x_2y_2 + (1+b)\, x_3y_3$$

   es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

6. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

   I) $\langle\,,\rangle : K^{n\times n}\times K^{n\times n}\to K,\ \ \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A\cdot B^*),$ con $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

   II) $\langle\,,\rangle : C[0,1]\times C[0,1]\to \mathbb{R},\ \ \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

   III) $\langle\,,\rangle : K^n\times K^n\to K,\ \ \langle x,y\rangle = \overline{y}\cdot Q^*\cdot Q\cdot x^t,$ con $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.
   donde $Q\in K^{n\times n}$ es una matriz inversible.

   IV) $\langle\,,\rangle_T : V\times V\to K,\ \ \langle x,y\rangle_T = \langle T(x),T(y)\rangle,$ con $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.
   donde $V$ y $W$ son espacios vectoriales sobre $K$, $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno sobre $W$ y $T:V\to W$ es un monomorfismo.

7. Restringir el producto interno del item II) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B=\{1,X,\dots,X^n\}$.

8. *a*) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio (4*c*) con $K=\mathbb{R}$.

   *b*) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio (4*f*).

9. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de $V$.

   *a*) Probar que existe un único producto interno en $V$ para el cual $B$ resulta ortonormal.

   *b*) Hallarlo en los casos

      a) $V=\mathbb{C}^2$ y $B=\{(1,i),(-1,i)\}$.

      b) $V=\mathbb{R}^3$ y $B=\{(1,-1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

10. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de $V$:

    *a*) $V=\mathbb{R}^4,\ \ S_1 = <(1,1,0,-1),(-1,1,1,0),(2,-1,1,1)>$ para el producto interno canónico.

    *b*) $V=\mathbb{R}^3,\ S_2 = <(1,2,1)>$ para el producto interno definido por
    $\langle x,y\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1.$

    *c*) $V=\mathbb{C}^3,\ S_3 = <(i,1,1),(-1,0,i)>$
    para el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_T$ definido en el ejercicio (6IV) con $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$
    $T(x)=\begin{pmatrix} i & -1+i & 0\\ 1 & i & 0\\ 1 & i+1 & i\end{pmatrix}\cdot x^t$ y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^3$.

    *d*) $V=\mathbb{C}^4,\quad S_4=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{C}^4\ /\ \begin{cases} x_1+2ix_2-x_3+(1+i)x_4=0\\ x_2+(2-i)x_3+x_4=0\end{cases}\right\}$
    para el producto interno $\langle x,y\rangle = x_1\overline{y}_1+2x_2\overline{y}_2+x_3\overline{y}_3+3x_4\overline{y}_4$.

11. *a*) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.

    *b*) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

*c*) Hallar el punto de $S_4$ más cercano a $(0,1,1,0)$.

12. Se define $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como $\langle f, g\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

    *a*) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno.

    *b*) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

13. *a*) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\cdot B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

    *b*) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

    *c*) Se considera $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.
    *Sugerencia:* Considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x) >$.

14. Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de $V$. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^{\perp}$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

15. Calcular la ***transformación adjunta*** $f^*$ para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

    *a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

    *b*) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

    *c*) $B = \{(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\},\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    *d*) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\quad f(p) = p',\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

    *e*) $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}),\quad f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ f(A) = P^{-1}\cdot A\cdot P,\quad$ donde $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\cdot B^*)$.

    *f*) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\quad \mu_f(p) = f.p\ ,\quad$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$.

16. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean $f_1$ y $f_2$ endomorfismos de $V$ y sea $k$ un escalar. Probar:

    *a*) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

    *b*) $(kf_1)^* = \overline{k}f_1^*$

    *c*) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$

    *d*) Si $f_1$ es un isomorfismo, entonces $f_1^*$ es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$

    *e*) $((f_1)^*)^* = f_1$

    *f*) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

17. Sea $(V, \langle\, ,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^\perp$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f$ sea autoadjunta para $\langle\ ,\ \rangle$.

19. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $S$ un subespacio de $V$. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre $S$ es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

20. *a*) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O \cdot A \cdot O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

*b*) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U \cdot A \cdot U^*$ sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Hallar $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ triangular superior tales que

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

22. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que $f$ es ***normal*** si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

   *a*) Probar que si $f$ admite una base ortonormal de autovectores, entonces $f$ es normal.

   *b*) Probar que si $f$ es normal valen las siguientes afirmaciones:

      1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.

      2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda\, id_V$ es normal.

      3) Si $v$ es un autovector de $f$ de autovalor $\lambda$, entonces $v$ es un autovector de $f^*$ de autovalor $\overline{\lambda}$.

      4) $S_\lambda = \{v \in V \,/\, f(v) = \lambda v\}$ es $f^*$-invariante.

   *c*) Probar que si $f$ es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.
   *Sugerencia*: observar que $(S_\lambda)^\perp$ es $f$-invariante y $f^*$-invariante.

   *d*) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de una matriz ortogonal que no sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

23. *Parametrización de Cayley.*

   (i) Sea $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal que no tiene al $-1$ como autovalor. Probar que $(I_n - O)(I_n + O)^{-1}$ es una matriz antisimétrica.

   (ii) Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica. Probar que $(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ es una matriz ortogonal que no tiene al $-1$ como autovalor.

   (Comparar con el Ejercicio 26 de la Práctica 5.)

   (iii) Sea $\theta \in (-\pi, \pi)$. Probar que bajo estas aplicaciones se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

24. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

   *a*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

   *b*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

   *c*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

   *d*) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje dado por $< (1, 0, 1) >$.

25. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Decidir si $f$ es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría y encontrarlas.

26. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

   *a*) Probar que $f$ es una rotación.

   *b*) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

27. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una ***isometría*** si la distancia verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))\ \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2.$$

   *a*) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, $f$ resulta una transformación lineal y además $f$ es ortogonal.

   *b*) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.

28. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle\ ,\ \rangle$.

El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores $v_1$ y $v_2$ linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea, $\|v_1\|\,\|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|$.

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores $v_1, v_2, v_3$ linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería “área de la base por altura”, o sea, $\|v_1\|\,\|p_{<v_1>^\perp(v_2)}\|\,\|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\|$.

Si esto se generaliza a $k$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería $\|v_1\|\,\|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|\,\|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|$.

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \mathrm{Vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1}))\,\|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.*

*a*) Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Probar:

   a) Si $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
   
   b) Si $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >^\perp$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1}))\,\|v_k\|^2$.
   
   c) $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1}))\,\|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|^2$.

*b*) Probar que, si $v_1, \dots, v_k$ son vectores linealmente independientes, $(\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k))$.

*c*) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$. Deducir que $\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

*d*) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

*e*) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que $\mathrm{Vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f|\,\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n))$.

29. Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

*a*) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

*b*) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

30. Para cada una de las formas bilineales simétricas reales dadas en la base canónica por las matrices siguientes, hallar una base tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal con $1, -1$ y $0$ en la diagonal. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.  ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

31. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que la forma bilineal que tiene a $A$ como matriz en la base canónica es definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales van alternándose comenzando por un signo menos.

32. *Descomposición QR.*

 *a*) Probar que cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se puede factorizar como $A = QR$ con $Q$ ortogonal y $R$ triangular superior.

 *b*) *Desigualdad de Hadamard.* Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ las columnas de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
 Probar que
$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \|A_i\|.$$

∗ 33. *Descomposición en Valores Singulares.* Sea $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz. Probar que existen $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarias y $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal tales que que $M = UDV^*$ y las coordenadas no nulas de $D$ son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$ llamados *valores singulares.*

∗ 34. *Rango numérico.* Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$ los valores singulares no nulos de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $r$ y sea $E \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (una perturbación) con $||E||_2 < \sigma_r$.

 i) Probar que $\mathrm{rg}(A + E) \geq \mathrm{rg}(A)$.

 ii) Probar que
$$\min_{\mathrm{rg}(B)=k} \|A - B\|_2 = \sigma_{k+1}$$
 donde $\|M\|_2 := \min_{\|x\|=1} \|Mx\|$.

∗ 35. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $A = U\Sigma V^*$ su descomposición en valores singulares. Hallar una base ortonormal de autovectores para
$$\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}.$$

∗ 36. *a*) Sea $t > 0$ un número real positivo y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $a_{ij} = t$ para todo $i \neq j$, y $a_{ii} > t$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Probar que $A$ es definida positiva.

 *b*) *Desigualdad de Fisher.* Sean $C_1, C_2, \ldots, C_m$ subconjuntos no vacíos distintos de un conjunto de $n$ elementos tales que las intersecciones $C_i \cap C_j$ tienen el mismo cardinal para $i \neq j$. Probar que $n \geq m$.

$*$ 37. *Cuadrados mínimos.* Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

i) Mostrar que el sistema $Ax = b$ tiene solución si y sólo si $b$ pertenece al subespacio $E_C(A)$ generado por los vectores columna de $A$.

Si el sistema $Ax = b$ no tiene solución podemos "aproximar" una solución resolviendo el sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$ donde $\tilde{b}$ es el vector de $E_C(A)$ más cercano a $b$; o sea, $\tilde{b}$ es la proyección ortogonal de $b$ sobre $E_C(A)$.

ii) Mostrar que si $S \subset V$ es un subespacio entonces $v - p_S(v)$ es ortogonal a todo vector de $S$. Concluir que $b - \tilde{b}$ es ortogonal a todos los vectores columna de $A$. En particular, $A^t(b - \tilde{b}) = 0$.

iii) Usando que $\tilde{b} = A\tilde{x}$ mostrar que la aproximación $\tilde{x}$ buscada es la solución del sistema $(A^tA)\tilde{x} = A^tb$.

Notar que esta aproximación $\tilde{x}$ tiene la propiedad de minimizar $||b - A\tilde{x}||$ pues $A\tilde{x} = \tilde{b}$, que es la proyección ortogonal de $b$ sobre $E_C(A)$. Por lo tanto, $\tilde{x}$ es el que hace mínima la cantidad $||b - \tilde{b}|| = \sum_{i=1}^{n}(b_i - \tilde{b}_i)^2$. Esto justifica el nombre *cuadrados mínimos.*

$*$ 38. Utilizar el método de cuadrados mínimos para resolver los siguientes problemas.

i) Hallar y graficar la recta que mejor aproxima al siguiente conjunto de puntos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 3 |

ii) Encontrar el polinomio de grado 2 que mejor aproxima la tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 |
| $y$ | 1.3 | 2 | 2.7 | 3.5 |

iii) Ajustar la siguiente tabla de datos mediante una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 2 | 3 | 6 | 9 | 15 |