ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Segundo Cuatrimestre de 2015

Nota: Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *es una transformación lineal y* λ *un autovalor de* f *denotamos por* S_λ *al autoespacio asociado a* λ. *Es decir,* $S_\lambda := \{v \in \mathbb{V} : \ f(v) = \lambda v\}$.

Forma de Jordan

1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

   b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

   c) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

2. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ -1&0&-1&0&0&1&0 \\ -1&-1&-1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

3. Sean A_i $(1 \le i \le 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i}(X) = X^3$ $(1 \le i \le 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

4. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

6. *a*) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

   b) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una tal A.

7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

   b) Sean λ un autovalor de f y $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$ su multiplicidad en el polinomio característico.
   Sea $V_\lambda := \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda Id - f)^m(v) = 0\}$, ¿para qué autovalores λ de f se tiene que $S_\lambda = V_\lambda$?.

   c) Para cada autovalor λ de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}\big((\lambda Id - f)^k\big)$?

   d) Si λ es un autovalor de f, se nota f_λ a la restricción de $\lambda Id - f$ a V_λ. Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ.

8. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

   a) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f.

   b) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P, entonces $S_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.

   c) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P, entonces $S_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

9. Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{X}_A$, m_A y hallar la forma de Jordan de A.

   b) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A.

11. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

12. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

13. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A(X) = \mathcal{X}_B(X) = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A(X) = m_B(X)$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B.

14. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $\quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$
    b) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $\quad m_A(X) = (X-7)^2$
    c) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $\quad m_A(X) = (X-2)^3$
    d) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $\quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

15. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3, que verifica simultáneamente que

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^4 = 10, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^4 = 9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 12 & \text{y } \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^3 = 11. & \end{array}$$

Hallar su forma de Jordan.

16. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica simultáneamente que

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)^2(X-\lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j),$$
$$\mathrm{rg}(A-\lambda_1 I) = 11,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 10,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I) = 12,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y}$$
$$\mathrm{rg}(A-\lambda_4 I) = 13.$$

17. Sean x, $y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $a_{ij} = x_i y_j$.

    a) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.
    b) Calcular las posibles formas de Jordan de A. Comparar con el Ej. 16 de la Práctica 6.

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

19. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $m_A(X) = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

21. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.
Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda\, I_m + J(0, m)$.

b) Verificar que $\operatorname{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k I_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.

c) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

22. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de forma recurrente como

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad (\forall\ n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar el término general de la sucesión.

23. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& 3\,x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &=& x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) &=& -x_2(t) + 2\,x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$ y $x_3(0) = 1$.

24. Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Markov y $\mathcal{X}_M \in \mathbb{R}[X]$ su polinomio característico.
Probar que $\dim \operatorname{Nu}(M - I_n) = \operatorname{mult}(1, \mathcal{X}_M)$.

25. Sean A y B matrices en $\mathbb{C}^{n\times n}$ con $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$, $m_A = m_B$ y tales que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ los rangos de $A - \lambda I$ y $B - \lambda I$ coinciden. Probar que A y B son semejantes si las raíces de $\mathcal{X}_A$ tienen multiplicidad a lo sumo 6. Dar un contraejemplo si se suprime la hipótesis sobre las multiplicidades.

$*$ 26. Probar que

$$\exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$*$ 27. Sea $V = \mathbb{R}_n[X]$ y $\delta : V \to V$ dada por $\delta(f) = f'$.
Probar que $\exp(t\delta)(f)(X) = f(X + t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$*$ 28. Sean A, B y ζ_n como en el Ejercicio 28 de la Práctica 5.

a) Probar que las únicas matrices que conmutan simultáneamente con A y B son escalares.

b) Probar que A^n y B^n son matrices escalares.

c) Supongamos que $A^n = B^n = I_n$. Probar que existe $C \in \operatorname{Gl}_n(\mathbb{C})$ tal que CAC^{-1} es diagonal y CBC^{-1} es la matriz compañera del polinomio $X^n - 1$.

$*$ 29. Decidir cuáles de las siguientes matrices de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{4\times 4}$ son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Subespacios invariantes y Formas Racionales

$*$ 30. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(V)$. Supongamos $V = \bigoplus_{i=1}^{k} < v_i >_f$ donde $< v >_f := < v, f(v), f^2(v), \dots >$ es el subespacio f-invariante generado por v. Probar que si los polinomios minimales de los v_i son coprimos 2 a 2 entonces

$$< v_1 + \ldots + v_k >_f = V.$$

$*$ 31. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(V)$.

a) Sea $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante. Probar que $S^\circ \subseteq V^*$ es f^t-invariante.

b) Sea $v \in V$ y supongamos que su minimal $m_{v,f}$ coincide con el característico $\mathcal{X}_f$. Sea $B = \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ una base de V y $B^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ su base dual. Hallar m_{ϕ_n, f^t}, el minimal de ϕ_n con respecto a f^t.

c) Sea $v \in V$ tal que $m_{v,f} = m_f$. Supongamos que m_f tiene grado $r < n$.
Sea $B = \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{r-1}(v), v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ su dual. Probar que el anulador del subespacio f^t-invariante generado por ϕ_r es un complemento f-invariante para $< v >_f$, es decir:

$$< v >_f \oplus {}^{\circ}\left(< \phi_r >_{f^t}\right) = V.$$

$*$ 32. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(V)$.

a) *Polinomio conductor* Sea $v \in V$ y $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante. Probar que existe un único polinomio mónico de grado mínimio $c_{v,f,S}$ tal que $c_{v,f,S}(f)(v) \in S$.

b) Supongamos que $m_f(X) = P(X)^m$ con P irreducible en $K[X]$.
Probar que existen $v_1, \dots, v_k$ tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} < v_i >_f .$$

(Sugerencia: Tomar v_1 con minimal de grado máximo. Si $V \neq < v_1 >_f$, tomar w tal que $c_{w,f,< v_1 >_f}$ tenga grado máximo y definir v_2 como $w - Q(f)(v_1)$ con $Q \in K[X]$ adecuado para que $< v_1 >_f \cap < v_2 >_f = \{0\}$.)