ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo Cuatrimestre de 2015

Autovectores - Autovalores - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.

3. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal $\delta(f) := f'$. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

   i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

   ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

   ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ resulte diagonalizable.

7. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).

   ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea diagonal.

   iii) Hallar la fórmula general para el término F_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

   iv) Se define la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

   Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

9. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

10. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.

    i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow$ 0 no es autovalor de A.

    ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible, x autovector de $A \Rightarrow x$ autovector de A^{-1}.

    iii) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y n es impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

    iv) Si A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la suma de todos los autovalores de $A + B$ es igual a la suma de todos los autovalores de A y de B.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + Id_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n es par.

12. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

    con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

    Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} . \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} . \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

13. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1,-1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿A es única?

14. i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

    ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$. Si 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3Id_4$, hallar todos los autovalores de A.

15. i) Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿f es diagonalizable?

    ii) Sea K un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : K^n \to K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$ y decidir si f es diagonalizable.

16. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

17. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad.

    i) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

    ii) Probar que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

19. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

    i) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} A\cdot B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B\cdot A \end{pmatrix}$ en $K^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

    ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A\cdot B} = \mathcal{X}_{B\cdot A}$.

20. Hallar el determinante de

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{pmatrix}.$$

Matrices de Markov

Definición: Un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se dice *de probabilidad* si $x_1 + \ldots + x_n = 1$ y $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *de Markov* si todas sus columnas son vectores de probabilidad.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de Markov. Probar
    a) Si $Ax = y$, entonces $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.
    b) Si $Ax = y$ y $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $y_i \geq 0\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.
    c) Si $Ax = y$ y x es de probabilidad, entonces y lo es.
    d) Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es de Markov, entonces AB lo es.
    e) A^k es de Markov para todo $k \geq 1$ entero.
    f) Si existe $A_\infty := \lim\limits_{k\to\infty} A^k$, entonces A_∞ es de Markov.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de Markov. Probar
    a) 1 es autovalor de A.
    b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A, entonces $-1 \leq \lambda \leq 1$.
    c) Si $\lambda = -1$ no es autovalor de A y A es diagonalizable, entonces A_∞ existe.
    d) Si $Ax = \lambda x$ con $\lambda \neq 1$ y $x \neq 0$, entonces $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de Markov. Probar
    a) Sea $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $v(0) := v$, $v(k) := Av(k-1)$ para $k \geq 1$. Si existe $v(\infty) := \lim\limits_{k\to\infty} v(k)$, entonces $Av(\infty) = v(\infty)$.
    b) Sea $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, si existe A_∞ entonces $v(\infty)$ existe y $v(\infty) = A_\infty v$.
    c) Sea $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ Ax = x\}$. Se demuestra que existe $v \in S_1$ de probabilidad. Si $\dim S_1 = 1$, A es diagonalizable y $\lambda = -1$ no es autovalor, entonces las columnas de A_∞ son todas iguales a v.

24. Un país cuya población es constante está dividido en tres regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B y 1 de cada 6 a la C, 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A y 1 de cada 10 a la C, mientras que 1 de cada 6 habitantes de la zona C se traslada a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A, 30 millones en la B y 15 millones en la C. Calcular el estado de la población dentro de 30 años. ¿Existe un estado de equilibrio?

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz compañera de $X^3 - 1$. ¿Es una matriz de Markov?
    ¿Existe $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$? ¿Existe un estado de equilibrio?

$*$ 26. Alrededor de una circunferencia hay 17 jarras rotuladas consecutivamente $1, 2, \ldots, 17$, con un total de 7 litros de agua en ellas. Desde la jarra 1 se traspasan un medio, un tercio y un séptimo del agua a las jarras 2, 3 y 4 respectivamente. A continuación, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{7}$ del agua de la jarra 2 se pasa a las jarras 3, 4 y 5 respectivamente. Lo mismo se hace con las jarras $3, 4, \ldots, 17$, en este orden: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{7}$ del agua de la jarra $k = 3, \ldots, 17$ se pasa a las jarras $k+1, k+2$ y $k+3$ respectivamente (los índices se toman módulo 17). Resulta que al final del proceso cada jarra contiene la misma cantidad de agua que tenía inicialmente. Determinar esa cantidad para cada jarra. Hallar todas las posibilidades.

Polinomio minimal

27. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sean P y $Q \in K[X]$.
    i) Probar que:
        a) Si $a, b \in K$, $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$.
        b) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.
        c) $P^n(A) = (P(A))^n$.
    ii) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?
    iii) Si P y Q coprimos y $x \in K^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$.

28. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:
    i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (a) $P(X) = X - 1$, (b) $P(X) = X^2 - 1$, (c) $P(X) = (X-1)^2$.
    ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; $P(X) = X^3 - iX^2 + 1 + i$.

29. Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

30. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

31. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices y comparar con su polinomio característico:

i) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

viii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xi) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

32. Sea $A \in K^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

33. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

    i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P' + 2P$
    ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ f(A) = A^t$

34. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal $\delta(P) := P'$. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

35. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5Id_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de Id_2.

    iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37Id_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de Id_2.

    v) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

    vi) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

36. Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En ese caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

37. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + Id_n = 0$. Comparar con el ejercicio 11.

38. i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y,\ 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

    ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

    iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

    $$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

    ¿g_θ es diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

39. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

    i) Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

    ii) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

40. i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V f-invariante, probar que $f : S \to S$ es diagonalizable.
    ii) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$ y sea $E_\lambda = \{x \in K^n \,/\, Ax = \lambda.x\}$. Probar que E_λ es B-invariante.
    iii) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C \cdot A \cdot C^{-1}$ y $C \cdot B \cdot C^{-1}$ son diagonales (es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente).

41. i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.
    ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

42. Sea $A \in K^{n\times n}$.
    i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A.
    ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

43. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.

∗ 44. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $R_i := \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.
Sean $D(a_{ii}, R_i) := \{z : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$ los *discos de Gershgorin.*
    a) Probar que cualquier autovalor de A pertenece a al menos uno de tales discos.
    b) Sea α una raíz del polinomio $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
    Probar que $|\alpha| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$.
    c) Probar que $|\alpha| \leq 1 + \max\{|a_i| : i = 0, \ldots, n-1\}$.

∗ 45. Sean $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ dadas por $f(x_1, x_2) = (2x_2, x_1)$ y $g(y_1, y_2) = (3y_2, y_1)$. Se definen $f_1^t, g_2^t : \mathrm{Bil}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Bil}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ como

$$f_1^t(\omega)(x, y) := \omega(f(x), y) \qquad \text{y} \qquad g_2^t(\omega)(x, y) := \omega(x, g(y)).$$

    a) Hallar B_1 y B_2 bases de autovectores de f y g respectivamente.
    b) Sea ϕ un elemento de la base dual a B_1 y ψ uno de la dual a B_2 . Probar que $\omega(x, y) = \phi(x).\psi(y) \in \mathrm{Bil}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ es autovector de f_1^t y g_2^t.
    c) Hallar las matrices de f_1^t y g_2^t en la base $B^* = \{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\}$.

∗ 46. a) Sea S el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial generado por $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$, y sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$. Sabiendo que $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ y α^4 pertenecen a S, hallar un polinomio de grado 4 con coeficientes racionales que tenga a α como raíz.
    b) Calcular la resultante $\mathrm{Res}_Y(Y^2-2, (X-Y)^2-3) \in \mathbb{C}[X]$ pensando a Y^2-2 y $(X-Y)^2-3$ como polinomios en Y con coeficientes en $\mathbb{C}[X]$.
    c) Hallar el polinomio característico de $f_1^t + g_2^t$ del ejercicio anterior. Reflexionar.