ALGEBRA LINEAL - Práctica N°3 - Segundo Cuatrimestre de 2015

Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3\,,\ x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\,,\ |x_1|)$
   c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = iz$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)
   d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)
   e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\,,\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
   f) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
   g) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

   a) $f(x, y) = (x, 0)$
   b) $f(x, y) = (x, -y)$
   c) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$
   d) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t\,,\ x \operatorname{sen} t + y \cos t)$

3. *a*) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v\,,\ w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
   b) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k.v) = k.f(v)$ para cualquier escalar $k \in K$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

4. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

   a) $tr : K^{n\times n} \to K$
   b) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n},\ t(A) = A^t$
   c) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ f(A) = B \cdot A$ donde $B \in K^{r\times n}$
   d) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \delta(f) = f'$
   e) $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])\ ,\ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$
   f) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$
   g) $s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}},\ s(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

5. i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

   ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

   iii) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1, 0, 1) = (1, 2, 1),\quad f(2, 1, 0) = (2, 1, 0),\quad f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1),$$
$$g(1, 1, 1) = (1, 1, 0),\quad g(3, 2, 1) = (0, 0, 1),\quad g(2, 2, -1) = (3, -1, 2).$$

   Determinar si $f = g$.

   iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

   v) Hallar una fórmula para todas las tranformaciones lineales $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ que satisfacen $f(X^2 + X - 1) = (1, 2)$, $f(2X + 3) = (-1, 1)$ y $f(X^2 - X - 4) = (2, 1)$.

6. i) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del Ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

   ii) Clasificar las transformaciones lineales del Ejercicio 4 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

8. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

   i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

   ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

   iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

   iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

9. i) Sean S, $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por
   $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$.
   ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

   ii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

   iii) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

   iv) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

10. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal
   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

   i) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = < (1, 2, 1) >$

ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0,\ -x_3 + 2x_4 = 0\},\ T = < (1, 2, 1) >$

11. En cada uno de los siguientes ítems encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

    i) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
    ii) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = < (1, 1, 2) >$
    iii) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
    iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
    v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
    vi) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

12. Sea $S = < (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

    i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.
    ii) Usando el ítem anterior describir S a partir de ecuaciones.
    iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$.

13. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to K^n$ de la siguiente manera:

$$\alpha_{B(v)} = (x_1, \dots, x_n), \quad \texttt{si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Probar que α_B es un isomorfismo. Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

a) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n

b) $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n

c) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n

Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1\ ,\ X^2 - 3X + 5\ ,\ 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver que $\{(1, -1, 1)\ ,\ (1, -3, 5)\ ,\ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para lo que se puede usar el método de triangulación.

14. Sea V un K-espacio vectorial y sea $p : V \to V$ una transformación lineal. p se llama un *proyector* si y sólo si $p \circ p = p$.

    Probar que $p : V \to V$ es un proyector $\iff p(v) = v \quad \forall\, v \in \mathrm{Im}(p)$.

15. En cada uno de los siguientes ítems construir un proyector $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\mathrm{Im}(p) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

ii) $\mathrm{Nu}(p) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

iii) $\mathrm{Nu}(p) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(p) = <(1, 1, 1)>$.

16. Sea V un K-espacio vectorial y sea $p : V \to V$ un proyector. Probar que $f = id_V - p$ es un proyector con $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Nu}(p)$ y $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(p)$.

17. Sea V un K-espacio vectorial y sea $p : V \to V$ un proyector. Probar que

a) $V = \mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

b) Sea V es un K-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $p : V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(p) = S$ e $\mathrm{Im}(p)= T$.

18. Sea $V \neq \{0\}$ un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es *nilpotente* si $\exists\, s \in \mathbb{N} \,/\, f^s = 0$.

a) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

b) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff f^n = 0$.
(Sugerencia: considerar si las inclusiones $\mathrm{Nu}(f^i) \subseteq \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).

c) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

d) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada $i\,,\ 2 \leq i \leq n$, construir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nilpotente tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

19. *a*) Sea $S \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

b) Sea $T \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ y un vector $y \in K^n$ tales que $T = f^{-1}(y)$.

20. Sea $f : V \to V$ una tranformación lineal y sean B, B' bases de V. Calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
$B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$

b) $V = \mathbb{C}^2,\ f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

c) $V = \mathbb{C}^2,\ f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

d) $V = \mathbb{R}_4[X],\ f(P) = P',\ B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$

e) $V = \mathbb{R}_4[X],\ f(P) = P',\ B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$

f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ f(A) = A^t,\ B = B' = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$

g) V, f y $B = B'$ como en el Ejercicio 18*c*.

21. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3.v_1 + 2.v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$.

22. Sea V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Sea $f : V \to V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar $|f^{-1}|_B$ y calcular $f^{-1}(v_1 - 2.v_2 + v_4)$.

23. En cada uno de los siguientes ítems, hallar un $n \in \mathbb{N}$ y una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifiquen:

a) $A \neq I_n$ y $A^3 = I_n$

b) $A \neq 0$, $A \neq I_n$ y $A^2 = A$

24. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V.

i) Sea $tr : \mathrm{Hom}(V, V) \to K$ la aplicación definida por $tr(f) = tr(|f|_B)$. Probar que $tr(f)$ está bien definida, o sea que no depende de la base B elegida. Notamos por $tr(f)$ a la *traza* del endomorfismo f.

ii) Probar que $tr : \mathrm{Hom}(V, V) \to K$ es una transformación lineal.

25. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B' = \{v_1 + v_3, v_1 + 2.v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $B'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |f|_{B'B''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar B''.

26. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Probar que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular $|f|_B$.

b) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base B de V tal que

$$\big(|f|_B\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $w \notin \mathrm{Nu}(f^{n-1})$).

27. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $p : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$\big(|p|_B\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \leq \dim(\mathrm{Im}(p)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

28. Sean V y W K-espacios vectoriales, $\dim V = n$ y $\dim W = m$, y $f : V \to W$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que existen una base B de V y una base B' de W tal que

$$\big(|f|_{BB'}\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3)$$

a) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices C, $D \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

31. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

32. Sean $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Se considera el sistema $Ax = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Probar que $Ax = b$ tiene solución $\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b)$.

33. Sea $A \in K^{m\times n}$, $\operatorname{rg}(A) = s$ y sea $T = \{X \in K^{n\times r} / \, A \cdot X = 0\}$. Calcular $\dim T$.

34. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\operatorname{rg}(A \cdot B) \leq \operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(A \cdot B) \leq \operatorname{rg}(B)$.

35. Sean $A,\ D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinar C_1 , C_2 , C_3 y $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C_1.A.C_2 = C_3.D.C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Determinar $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B, B', B_1 y B'_1 de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1B'_1} = D$.

36. Dadas $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decidir si existen matrices $P,\ Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A = P \cdot B \cdot Q$.

   i) $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ii) $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

37. Sean $A,\ B \in K^{n\times n}$. Se dice que A es *semejante* a B (y se nota $A \sim B$) si existe $C \in K^{n\times n}$ inversible tal que $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$.

   i) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $K^{n\times n}$.
   ii) Probar que dos matrices semejantes son equivalentes. ¿Vale la recíproca?
   iii) Sean $A,\ A' \in K^{n\times n}$. Probar que $A \sim A' \iff \exists\, f : K^n \to K^n$ tranformación lineal y bases B y B' de K^n tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$.

38. i) Sean $A,\ A' \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim A'$. Probar que $tr(A) = tr(A')$.
   ii) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
   ¿Existen $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$?

Formas bilineales

39. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica:
    i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
    ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$
    iii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$
    iv) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$
    v) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \Phi(x,y) = x_1.y_1 + (2+i).x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2+i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$
    vi) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) = (3.x_1 + x_2 - x_3).(4.y_2 + 2.y_3)$

40. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:
    i) $\Phi : K^n \times K^n \to K,\ \Phi(x,y) = x.A.y^t$, donde $A \in K^{n\times n}$.
    ii) $\Phi : V \times V \to K, \Phi(v,w) = f_1(v).f_2(w)$, donde V es un K-espacio vectorial y $f_1, f_2 \in V^*$.
    iii) $\Phi : K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K,\ \Phi(A,B) = tr(A^t.C.B)$, donde $C \in K^{m\times m}$.

41. i) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del Ejercicio 39, calcular su matriz en la base $\{(1,2,4),(2,-1,0),(-1,2,0)\}$.
    ii) Para las formas bilineales simétricas del Ejercicio 39 calcular su núcleo.

42. Hallar una forma bilineal Φ simétrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(\Phi) = <(1,2,-1)>$ y $\Phi((1,1,1),(1,1,1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

43. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal y B, B' bases de V. Probar que

$$|\Phi|_{B'} = C^t_{B'B}|\Phi|_B C_{B'B}.$$

44. Sean K un cuerpo donde $2 \neq 0$, V un K-espacio vectorial y $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Probar que son equivalentes
    (a) $\Phi(v,v) = 0$ para todo $v \in V$.
    (b) $\Phi(v,w) = -\Phi(w,v)$ para todo $v,w \in V$.

45. Sean K un cuerpo donde $2 \neq 0$, V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Probar que existe una base B tal que $|\Phi|_B$ es diagonal.